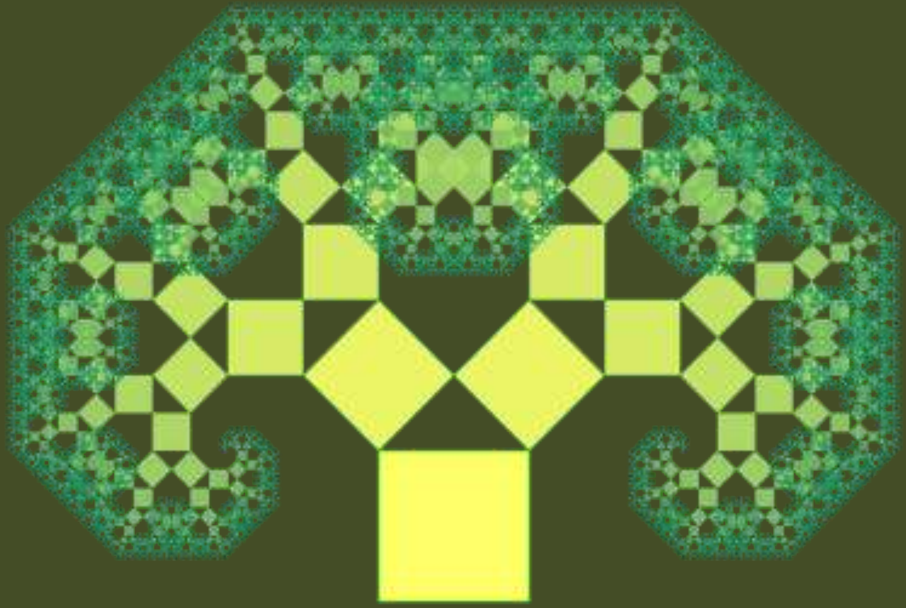


РАССКАЗ О **ФРАКТАЛАХ**

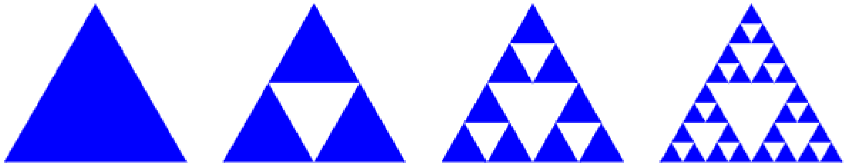
С.В. Григорьев и Е.Г. Яшина

Определение фрактала

Строгое определение: **Фракталом** называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича (D_F) которого строго больше топологической размерности (D_T).

Размерность Хаусдорфа-Безиковича - один из способов определения размерности множества в метрическом пространстве, может быть дробной (об этом будет рассказано далее).

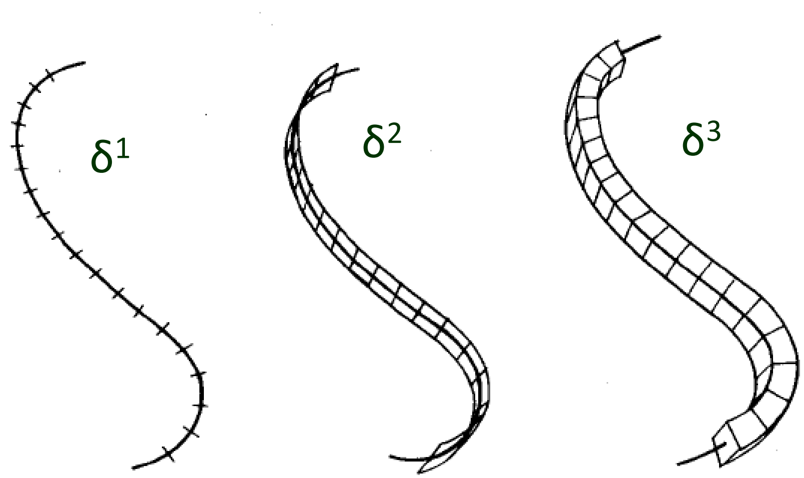
Топологическая размерность определяется индуктивным образом и всегда равна целому числу, так для пустого множества, D_T =-1, для точки D_T = 0, для отрезка D_T = 1, для плоской фигуры D_T = 2, для трехмерной D_T =3 и т.д.



Нестрогое определение: Объект называется **фрактальным,** если он обладает свойством самоподобия, то есть однороден на разных масштабах.

Мера множества и как ее измерить (кривая линия)

Для того, чтобы измерить длину кривой, площадь поверхности или объем тела, разобьем пространство на кубы с ребром δ, или сферы радиусом δ. Покроем интересующее нас множество сферами. И, подсчитывая число сфер $N(\delta)$, необходимых для покрытия мы получаем меру величины множества.
В пределе при δ -> 0 мера L становится асимптотически равна длине кривой, которая не зависит от δ.



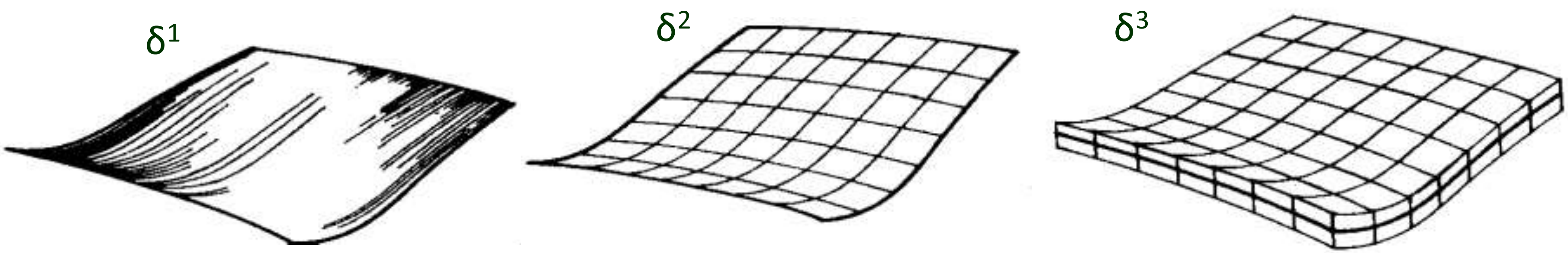
длина кривой $L = N(\delta)\,\delta \underset{\delta \to 0}{\to} L_0\,\delta^0.$ **конечное значение. Следовательно, является нормальной мерой для кривой**

площадь кривой $A = N(\delta)\,\delta^2 \underset{\delta \to 0}{\to} L_0\,\delta^1$

объем кривой $V = N(\delta)\,\delta^2 \underset{\delta \to 0}{\to} L_0\,\delta^2$

в пределе 0

Мера множества и как ее измерить (поверхность)



длина поверхности $L = N(\delta)\,\delta \underset{\delta\to 0}{\rightarrow} A_0\,\delta^{-1}$ **в пределе ∞**

площадь поверхности $A = N(\delta)\cdot\delta^2 \underset{\delta\to 0}{\rightarrow} A_0\,\delta^0$ **конечное значение**

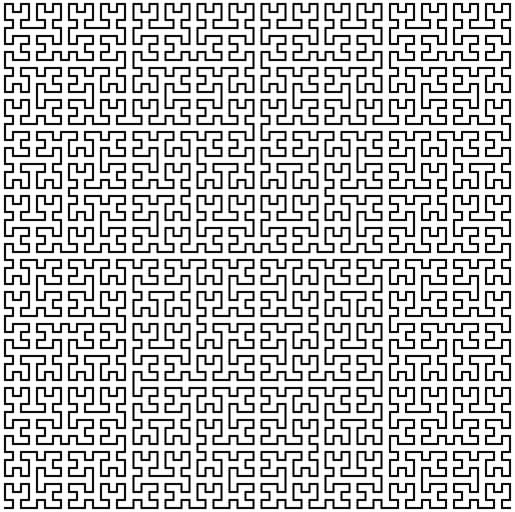
объем поверхности $V = N(\delta)\,\delta^3 \underset{\delta\to 0}{\rightarrow} A_0\,\delta^1$ **в пределе 0**

Следовательно, нормальной мерой поверхности является площадь

Мера множества и как ее измерить (фрактал)

В действительности, кривая (плоскость) может быть так сильно закручена, что длина (площадь) окажется бесконечной.
Существуют кривые (поверхности) полностью заполняющие пространство.
Для того, чтобы рассматривать такие множества, обобщим понятие мер.
Для этого выберем пробную функцию $h(\delta)=\delta^d$
с произвольным показателем d (ранее мы выбирали d=1, 2, 3).
$M_{\mathbf{d}}$ **$= \Sigma h(\delta)$ называется d-мерой множества F**

$$M_{\mathbf{d}} = \Sigma h(\delta) = N(\delta)\,\delta^{d} \;\; \text{--->} \begin{cases} 0 & \textbf{при} \quad \mathbf{d} > D_F \\ \infty & \textbf{при} \quad \mathbf{d} < D_F \end{cases}$$



Например, кривая Гильберта, которая заполняет всю плоскость

Размерность Хаусдорфа-Безиковича D_F множества F есть размерность, при которой мера $M_{\mathbf{d}}$ изменяет свое значение с 0 на бесконечность (имеет конечное значение)

$$D_F = \lim_{\delta \to 0} \ln(N(\delta)) / \ln(\delta)$$

Классификация фракталов

- Геометрические
- Динамические (алгебраические)
- Стохастические
- Физические
- Неживые
- Живые
- Фракталы нано- и микромира

Геометрические фракталы

- Увеличение масштаба не ведёт к упрощению структуры (в отличие от регулярных фигур), то есть на всех шкалах можно увидеть одинаковую картину.
- Обладает дробной метрической размерностью или метрической размерностью, превосходящей топологическую.
- Является строго самоподобным
- Существует простая рекурсивная процедура получения геометрических фракталов

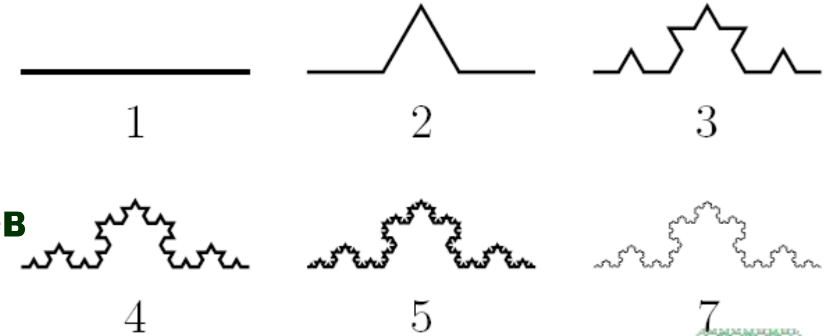
<u>**Процесс построения кривой Коха:**</u>

1. берём единичный отрезок,

2. разделяем на три равные части

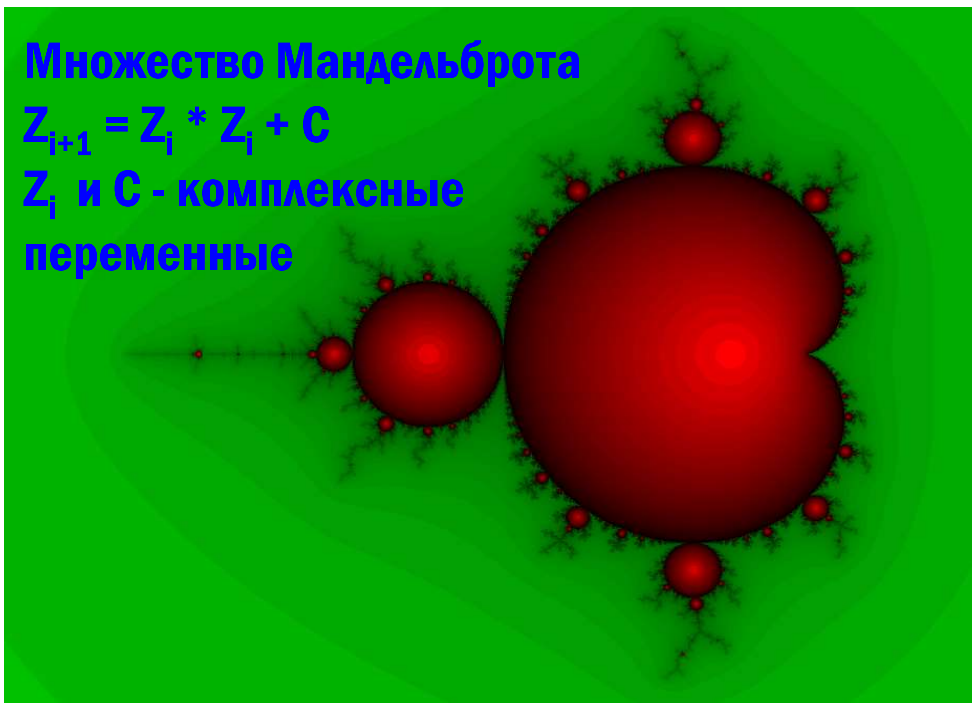
3. заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырёх звеньев длины 1/3.

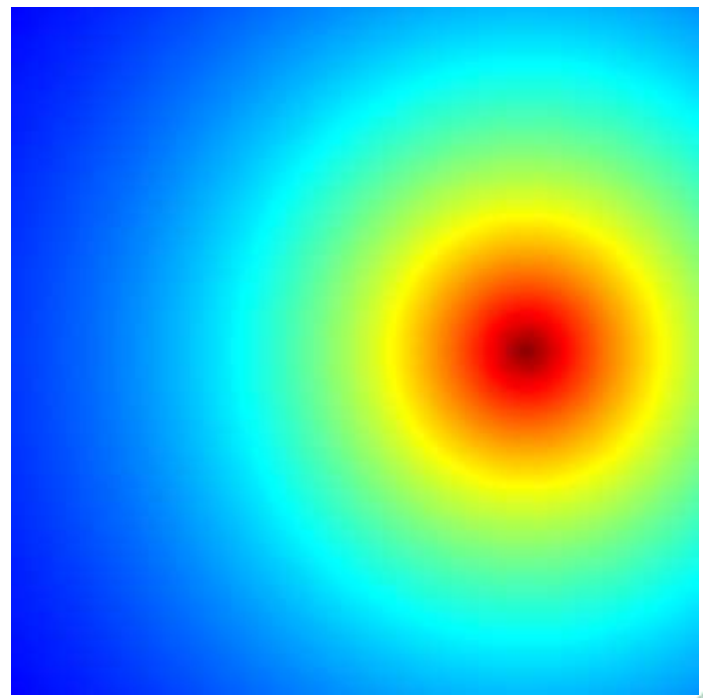
4. повторяем операцию для каждого из четырёх получившихся звеньев и т. д...



Динамические фракталы

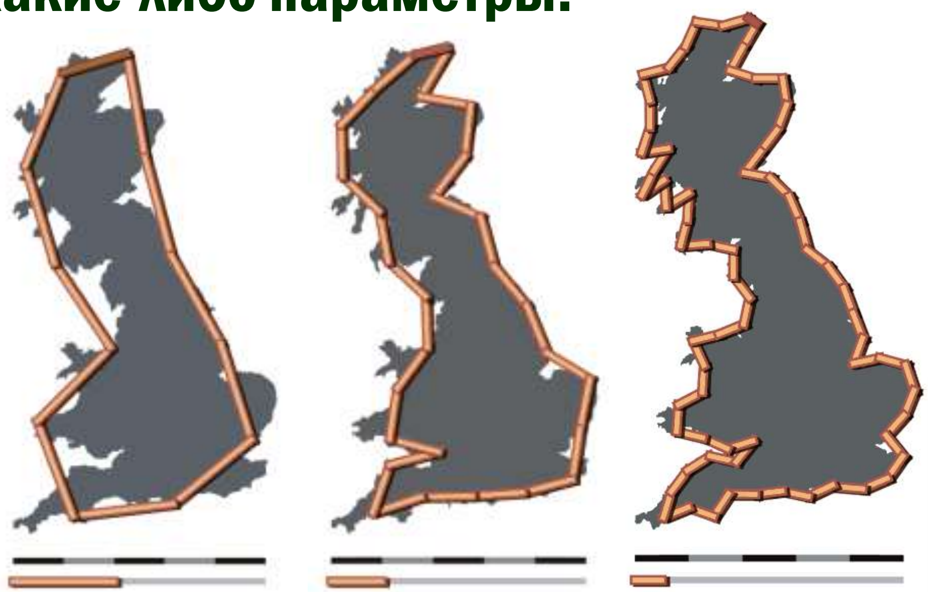
Фракталы этого типа возникают при исследовании нелинейных динамических систем. Поведение такой системы можно описать комплексной нелинейной функцией f(z). Возьмем какую-нибудь начальную точку z0 на комплексной плоскости. Рассмотрим бесконечную последовательность чисел на комплексной плоскости, каждое следующее из которых получается из предыдущего: z_0, $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, … $z_{n+1} = f(z_n)$…



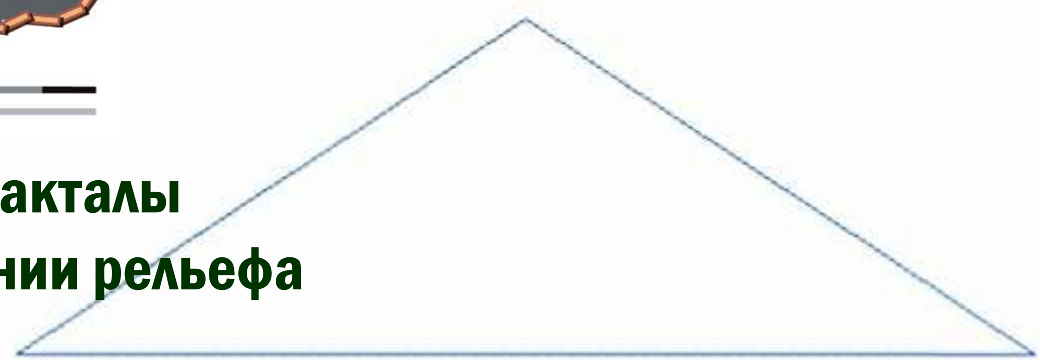


Стохастические фракталы

Это фракталы, при построении которых случайным образом изменяются какие-либо параметры.

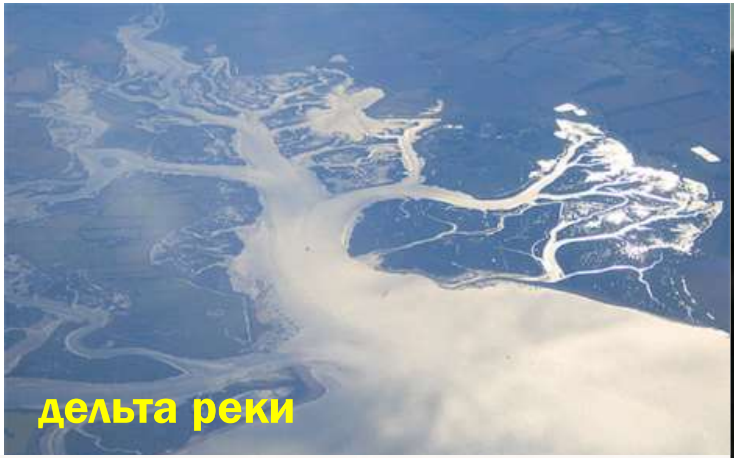


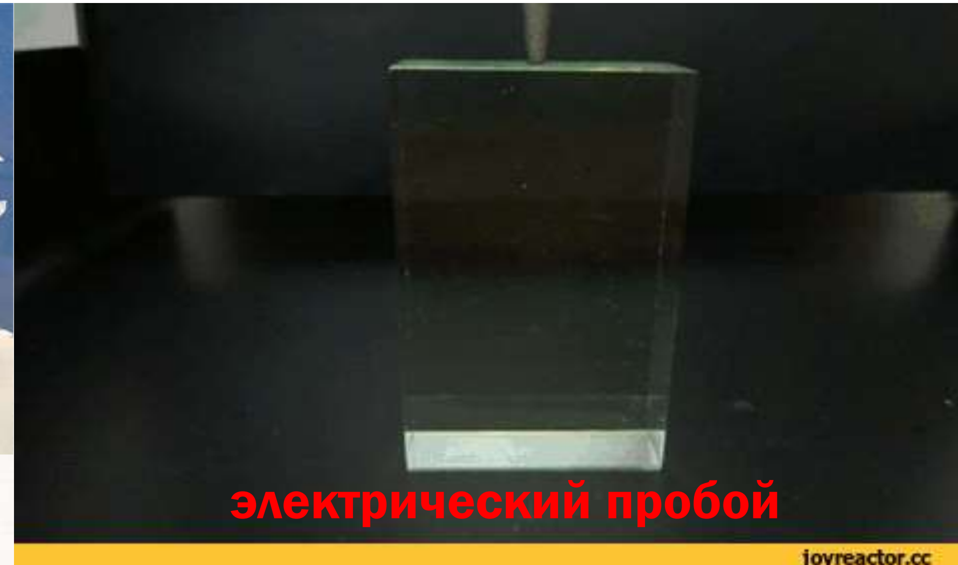
При этом получаются объекты очень похожие на природные - горы, изрезанные береговые линии и т.д.



Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря

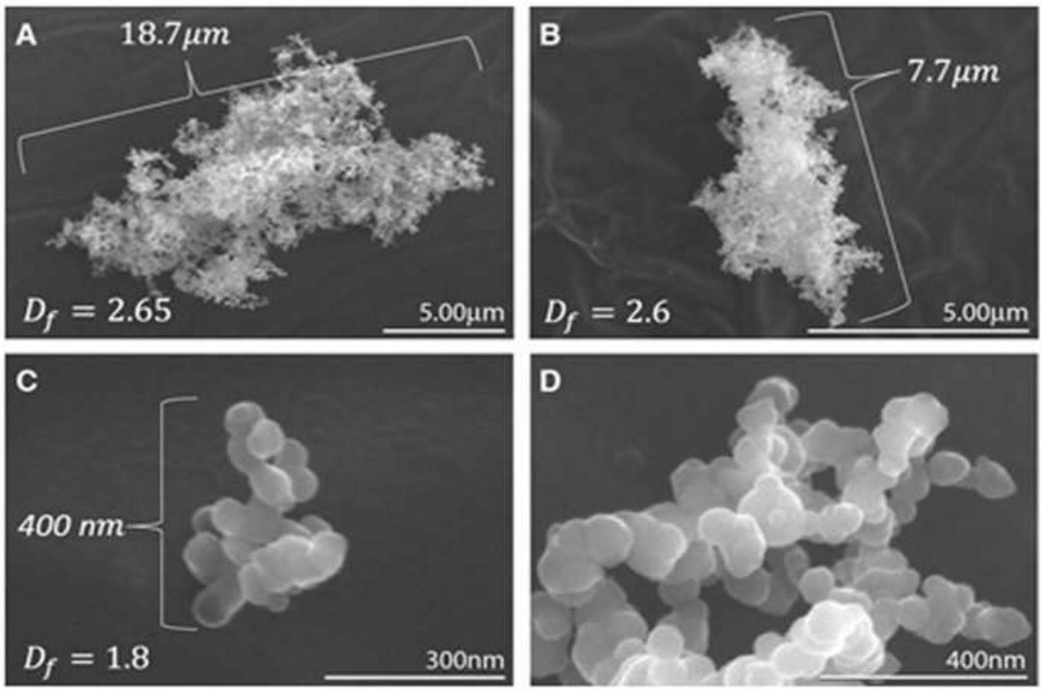
Физические фракталы (неживые)

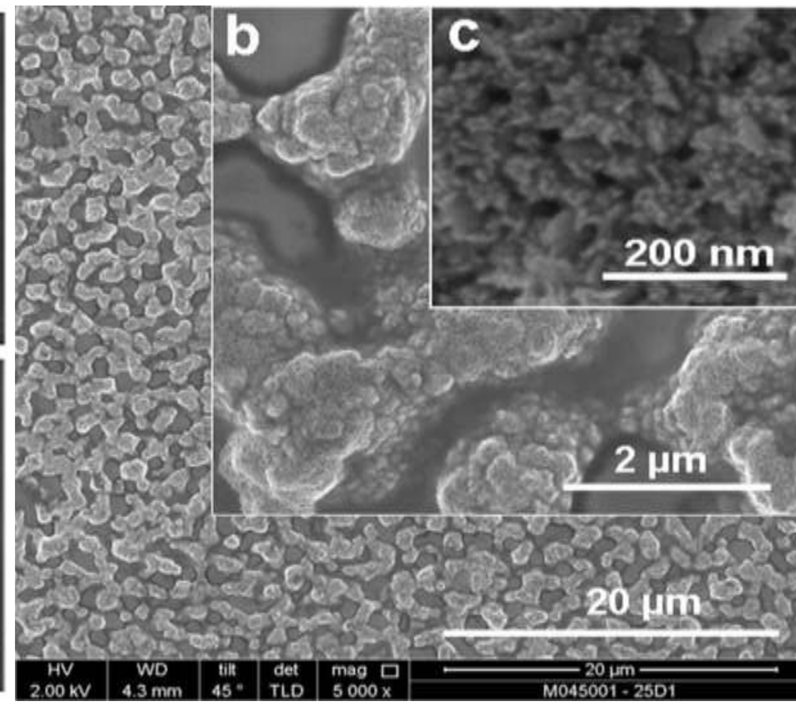




Физические фракталы (живые)

Нано Фракталы

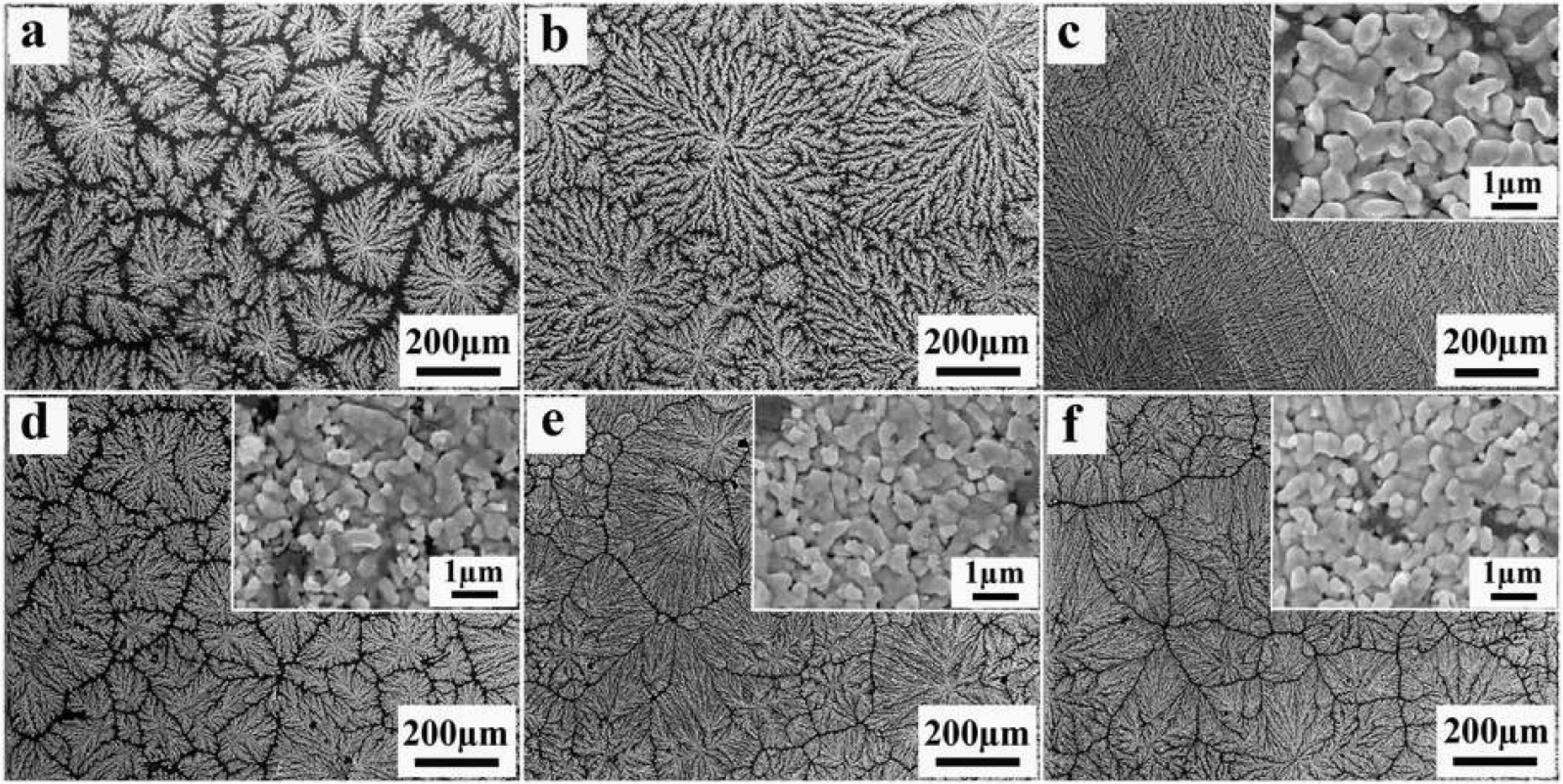




СЭМ изображение агрегатов сажи

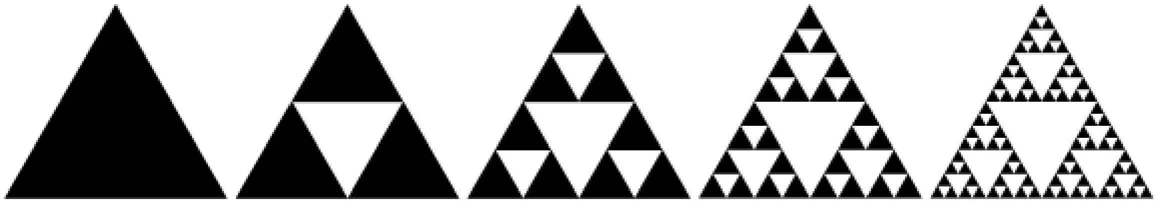
СЭМ квазипериодической структуры металл-кремний

Нано Фракталы



СЭМ серебряных и золотых частиц на алюминиевой подложке

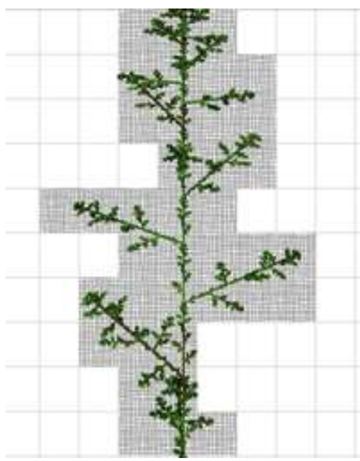
Как измерить фрактальную размерность?



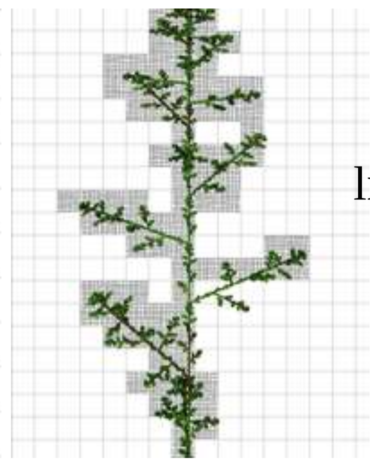
$$D_F = \lim_{\delta \to 0} \ln(N(\delta))/\ln(\delta)$$

На каждой итерации одна сторона делится на 2 части, т.е. M = 2, а в результате получается 3 части, т.е. N = 3, тогда $D_F = \log(3)/\log 2 = 1.58$

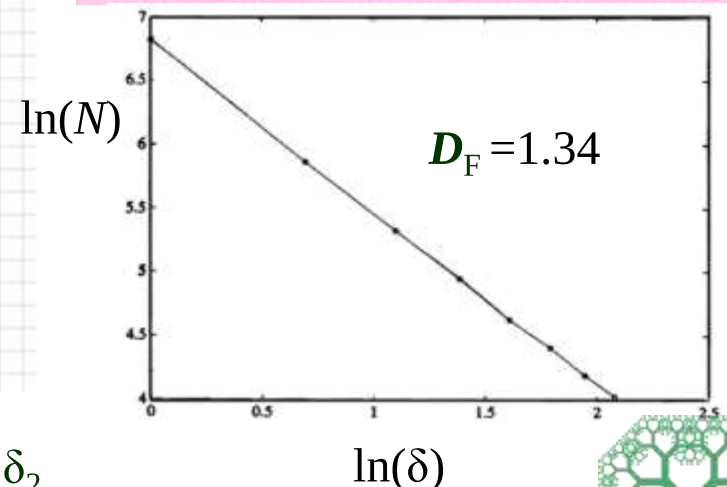
Исходный объект



Итерация 1 $N_1\ \delta_1$

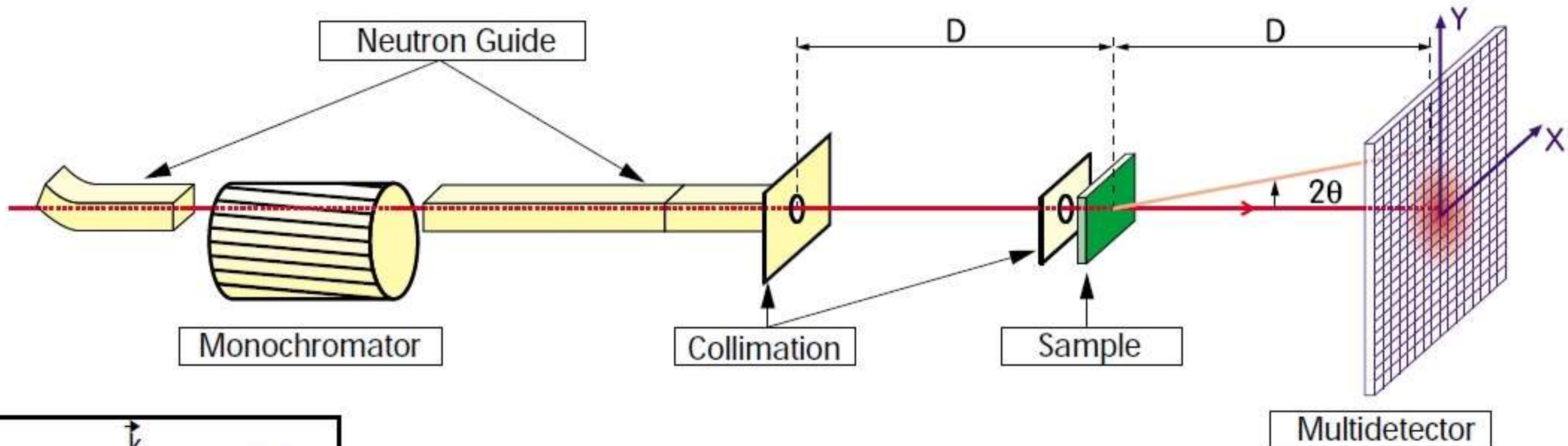


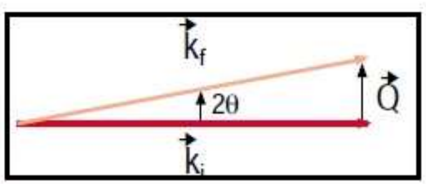
Итерация 2 $N_2\ \delta_2$



Измерения фрактальной размерности нано- и микрообъектов

Малоугловое рассеяние





Scattering diagram.

Q~ 0.001-1 Å^{-1}

10 – 1000 Å

Принципы малоуглового рассеяния

$$\gamma(\vec{r}) = \left\langle \iiint_V \rho(\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,' + \vec{r})d^3\vec{r}\,' \right\rangle$$

корреляционная функция объекта с плотностью $\rho(\boldsymbol{r})$.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{Q}) = \frac{\left| \iiint_V \rho(\vec{r})\exp(i\vec{Q}\cdot\vec{r})d^3\vec{r} \right|^2}{V}$$

сечение рассеяния объекта с плотностью $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{r})$.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{Q}) = F[\gamma(\vec{r})]$$

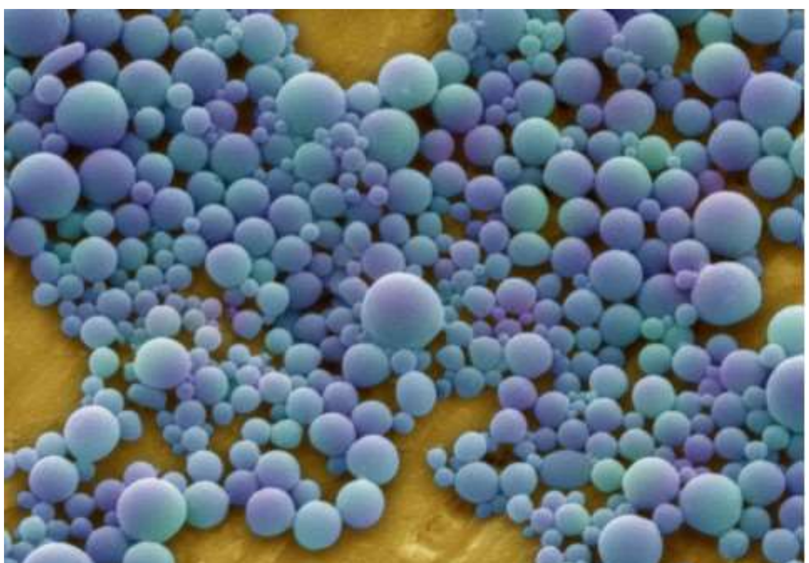
преобразование Фурье

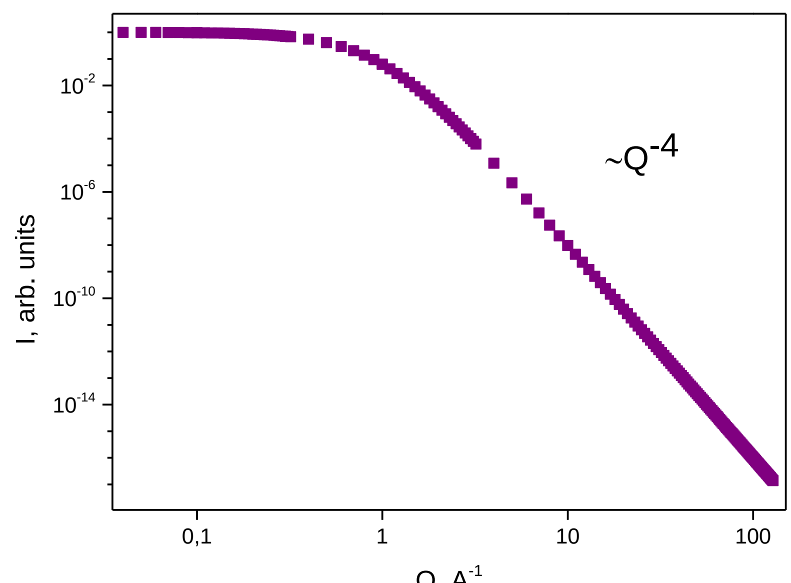
Классический случай рассеяния на нефрактальных трехмерных неоднородностях

$\gamma(r) = \exp(-r/\xi)$ **-корреляционная функция,**

ξ **– корреляционная длина**

сечение рассеяния - $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}(Q) = \dfrac{A}{(1+(Q\xi)^2)^2}$





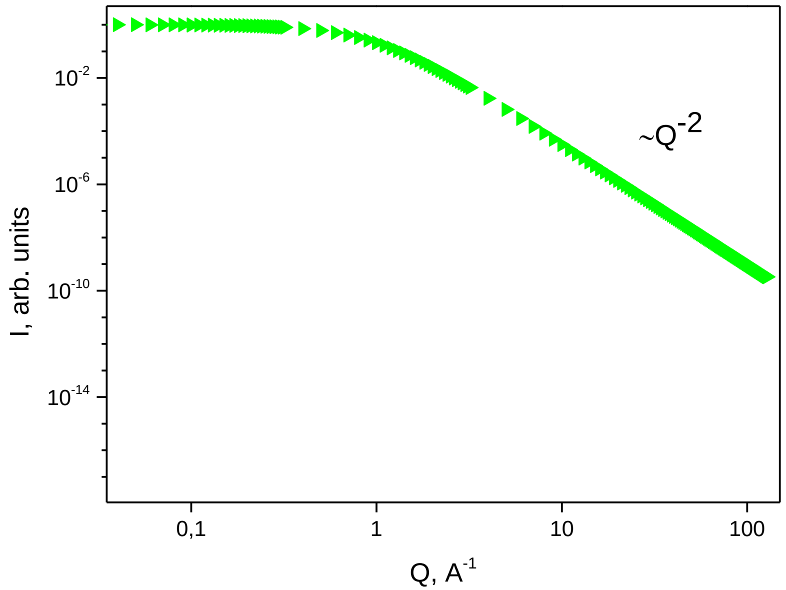
Нефрактальный 2D объект

Магнитное рассеяние на критических флуктуациях.

$\gamma(r) = \frac{1}{r}\exp(-r/\xi)$ **- корреляционная функция**

сечение рассеяния - $\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) = \frac{A}{(1+(Q\xi)^2)}$

Соотносится со случаем рассеяния на плоских частицах.



Модель неограниченных объемных фракталов

$$N(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{D_m}$$

число рассеивателей в шаре, радиусом *r*.

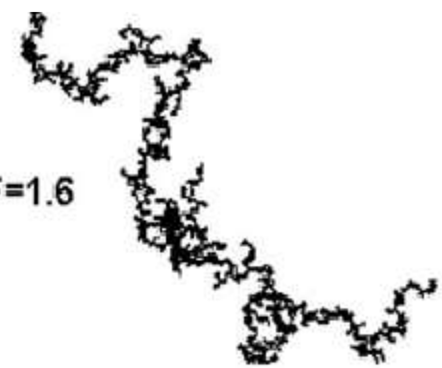
D_m – фрактальная размерность ($2<D_m<3$).

$$\gamma(r) = \frac{D_m V_0}{4\pi N}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{D_m-3}$$

- корреляционная функция

сечение рассеяния $$\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) = AQ^{-D_m}$$

DF=1.6



DF=2.1

DF=2.3

Не учитывает конечный размер фрактала!

Модель неограниченных поверхностных фракталов

Поверхностный фрактал конструируется как объемный фрактал на поверхности. $N(r) = N_0 r^{-D_s}$-число шаров радиусом r, которое требуется, чтобы покрыть фрактальную поверхность. D_s – фрактальная размерность, тоже самое, что и D_m

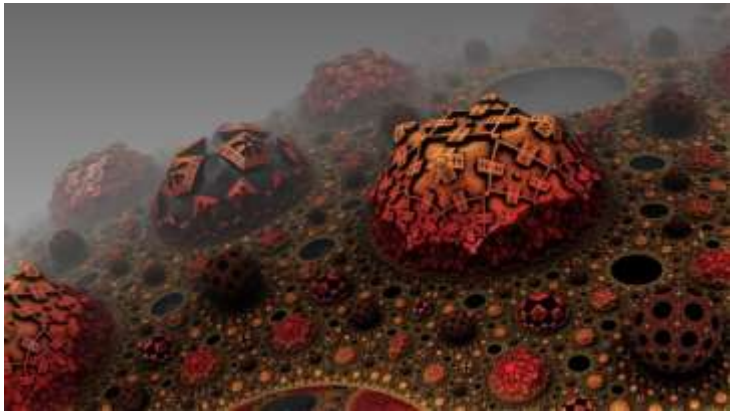
$V_b = N(r) r^3 = N_0 r^{3-D_s}$ - объем фрактального слоя.

$\gamma(r) = 1 - N_0 r^{3-D_s} / 4c(1-c)V$ - корреляционная функция.

По своему смыслу есть приведенный объем образца за вычетом объема фрактального слоя

$\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) = AQ^{D_s-6}$ - сечение рассеяния

Не учитывает конечный размер фрактала



Противоречие между моделью неограниченных фракталов и случаем рассеяния на нефрактальном трехмерном объекте

* Нефрактального трехмерного объекта с точки зрения модели неограниченных объемных фракталов $D_m = 3$

модели неограниченных поверхностных фракталов $D_s = 3$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) = AQ^{-3}}$$

* В то время как классический случай рассеяния на нефрактальных трехмерных неоднородностях, в котором учтен их размер дает выражение для сечения рассеяния.

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) = AQ^{-4}}$$

Что неоднократно подтвердилось экспериментально.

Противоречие возникающее при попытке учесть конечный размер объемного фрактала

Искусственное введение экспоненциальной срезки с параметром ξ, по аналогии со случаем рассеяния на критических флуктуациях [Teixeira].

$$\gamma(r) = \frac{D_m V_0}{4\pi N}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{D_m-3} \exp(-r/\xi)$$

[*] J. Teixeira J. Appl. Cryst. (1988). 21,781-785

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) = 1 + \frac{D\Gamma(D_m-1)\sin\left[(D_m-1)\arctan(Q\xi)\right]}{(Qr_0)^D_m\left(1+\frac{1}{(Q\xi)^2}\right)^{(D_m-1)/2}}$$

Утверждается, что при $1/\xi < Q < 1/r_0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) = AQ^{-D_m}$$

На самом деле, при $D_m = 3$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) = \frac{A}{(1+(Q\xi)^2)^2}$$

Потому что

$$\gamma(r) = \frac{D_m V_0}{4\pi N}\exp(-r/\xi)$$

В то время, как фрактальная размерность D_m плавно меняется от 2 до 3, соответствующая степень в малоугловом рассеянии также плавно меняется от 2 до 4. Это значит, что наклон кривой малоуглового рассеяния не равен фрактальной размерности (3≠ 4).

Исключает концепцию рассеяния на поверхностных фракталах.

Сечение рассеяния на фрактальных объектах

На сегодняшний момент накоплен огромный экспериментальный опыт по малоугловому рассеянию нейтронов на фрактальных объектах. Основываясь на этом опыте и, учитывая характер рассеяния, а именно, форму степенной функции от модуля переданного импульса в области, где фрактальное поведение возможно, а также конечные размеры рассеивателя, сечение рассеяния можно записать в самом общем виде

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) = \frac{A}{\left(1 + (Q\xi)^2\right)^{D/2}}}$$

Приведенное выражение должно описывать рассеяние на фрактальной частице, по крайней мере при $Q\xi << 1$. В классическом МУРН зачастую используют выражение $\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) \sim Q^{-D}$ поскольку в эксперименте не всегда удается определить корреляционную длину частицы ξ.

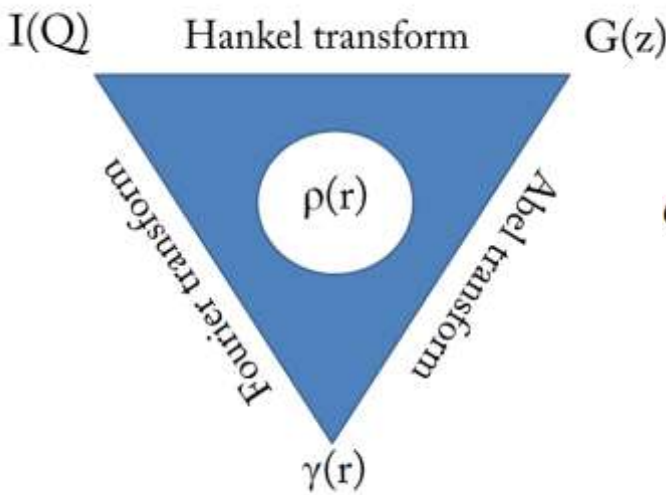
Выражения для корреляционной функции фрактального объекта и ее аналога – спин-эхо корреляционной функции

преобразование Фурье

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) = \frac{A}{(1+(Q\xi)^2)^{D/2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{D}{2}-1)}\left(\frac{r}{2\xi}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}\left(\frac{r}{\xi}\right)$$

K_n **- функция Макдональда порядка** n, Γ **- гамма-функция**

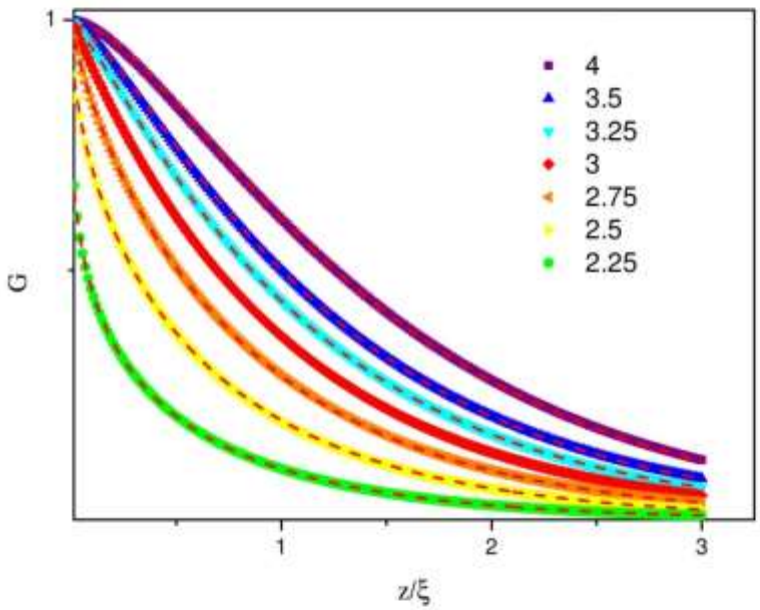
МУРН

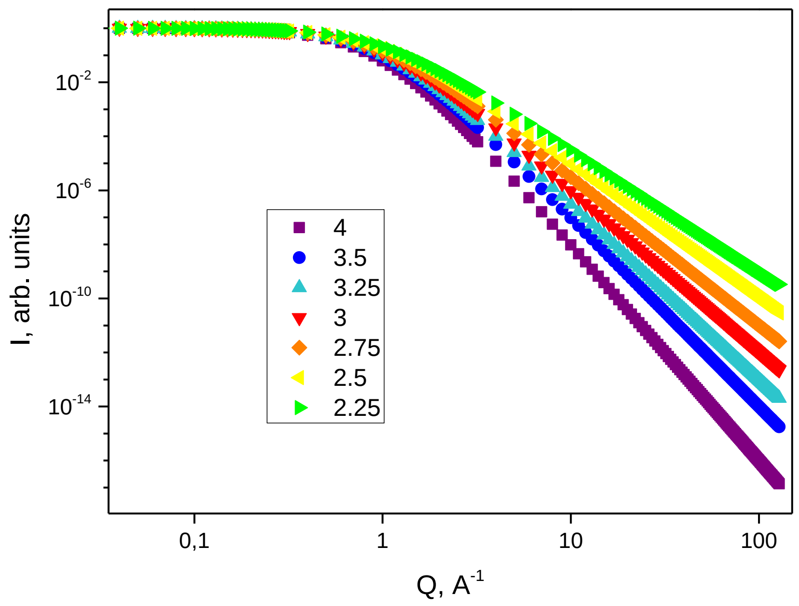


Спин-эхо малоугловое рассеяние нейтронов

$$G(z) = \frac{2}{\Gamma(\frac{D}{2}-1)}\left(\frac{z}{2\xi}\right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)$$

МУРН и СЭМУРН сигналы от фрактальной структуры





$$G(z) = \frac{2}{\Gamma(\frac{D}{2}-1)} \left(\frac{z}{2\xi}\right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) = \frac{A}{(1+(Q\xi)^2)^{D/2}}$$

Корреляционная функция

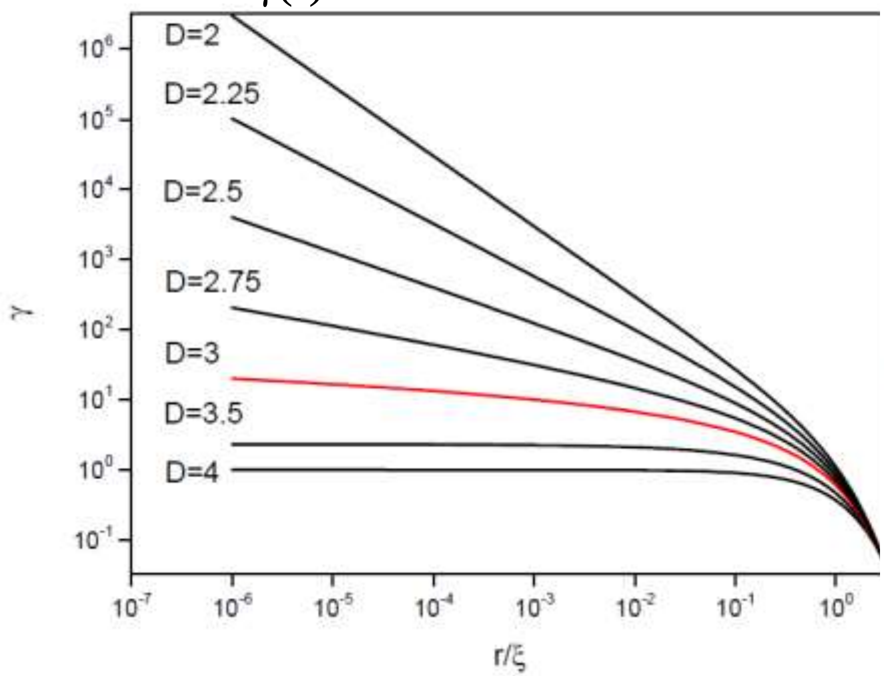
$$\gamma(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{D}{2}-1)}\left(\frac{r}{2\xi}\right)^{\frac{D-3}{2}} K_{\frac{D-3}{2}}\left(\frac{r}{\xi}\right)$$

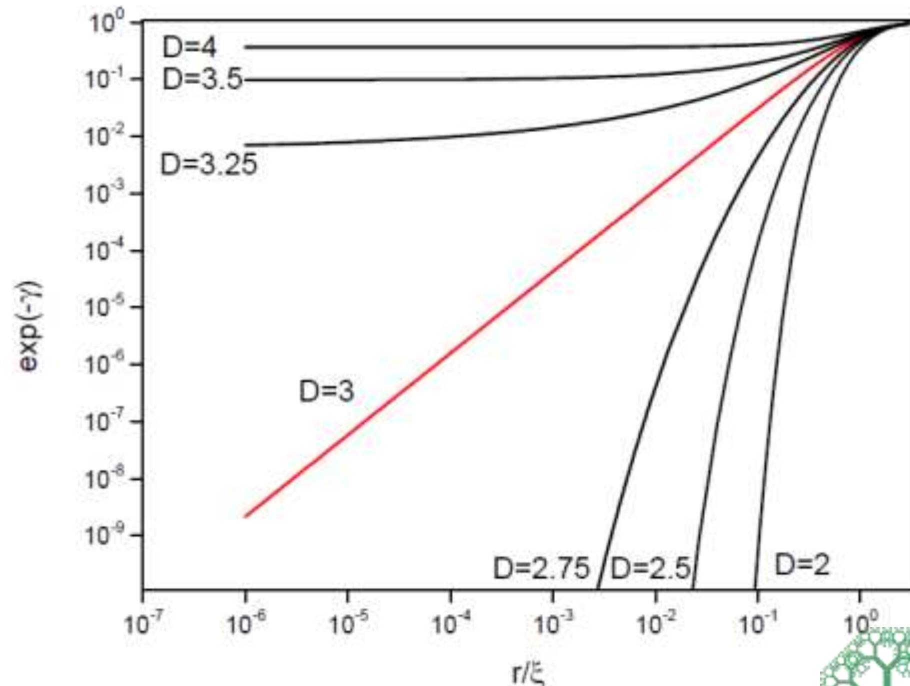
$$r/\xi < 1$$

$2<D<3$ $\gamma(r)\sim r^{3-D}$

$D=3$ $\gamma(r)\sim \ln(r/\xi)$

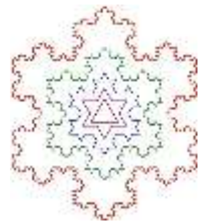
3<D<4 – константа



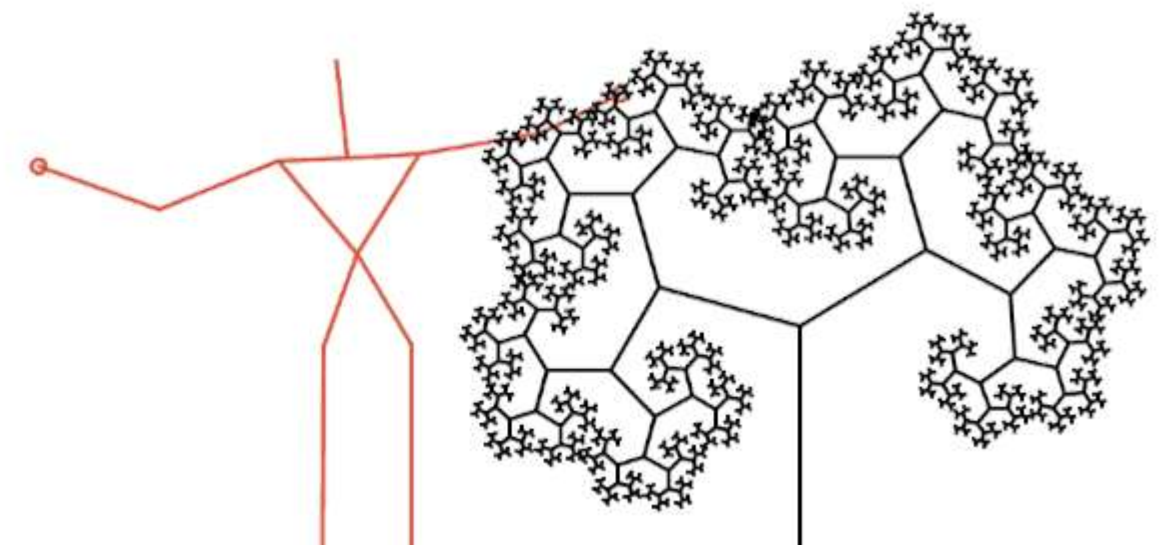


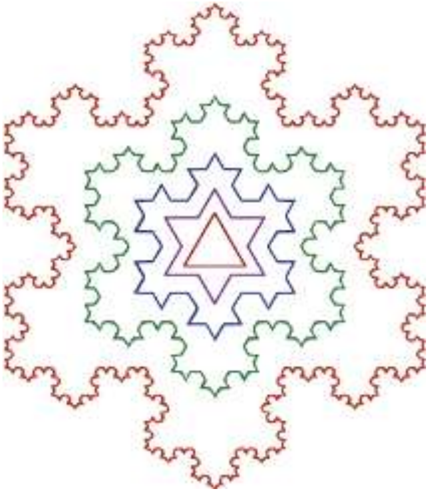
Обсуждение вида корреляционной функции

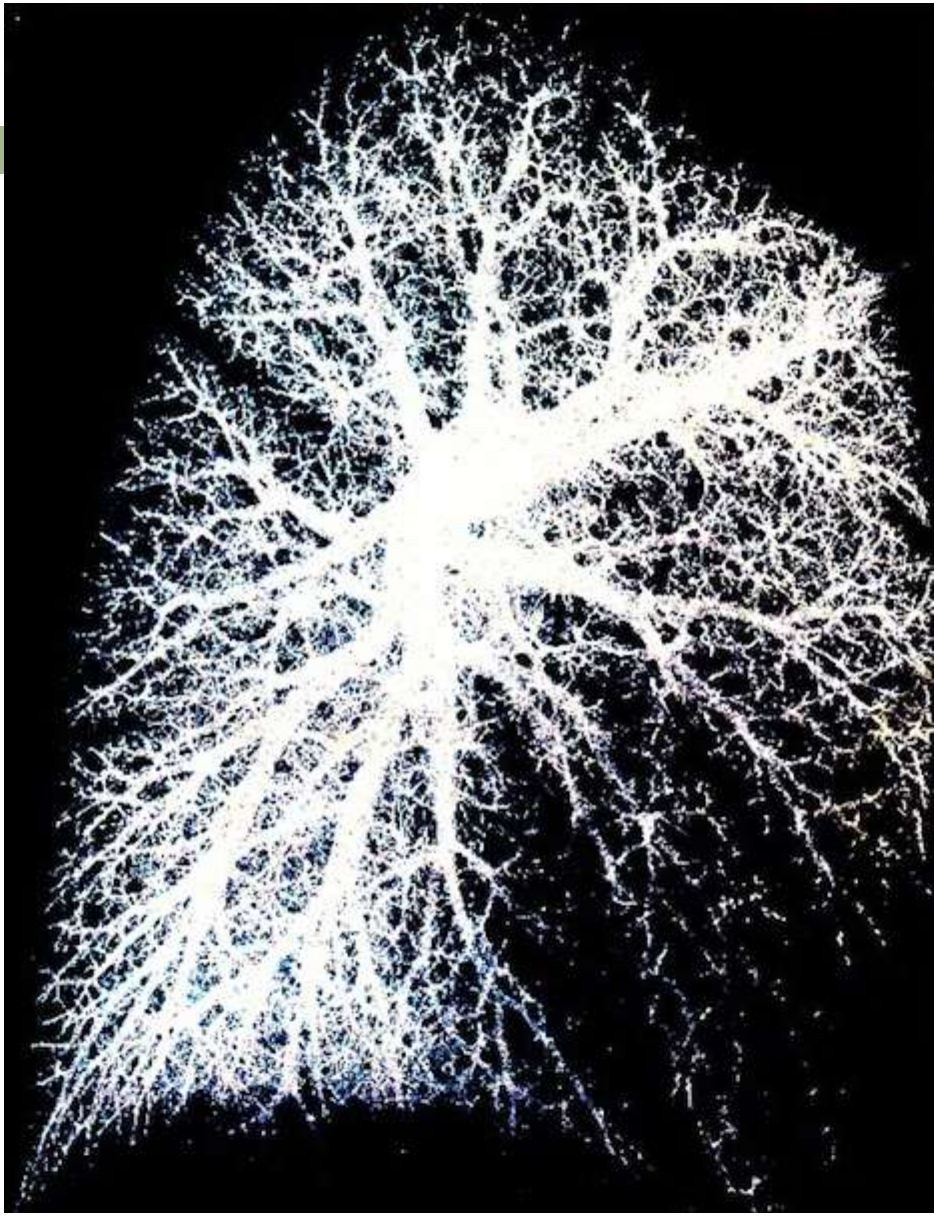
Учитывает конечный размер объекта: ξ - корреляционная длина фрактальной частицы. При $r/\xi \lesssim 0.1$ описывает фрактальное поведение

$4 > D > 3$	$D = 3$	$3 > D > 2$
Поверхностный фрактал $1 - \alpha \left(\frac{r}{\xi}\right)^{D-3}$ **плотное однородное ядро и фрактал на поверхности**	**Логарифмический фрактал** $\ln(\xi/r)$ **иерархически разветвленная структура**	**Объемный фрактал** $(r/\xi)^{D-3}$ 

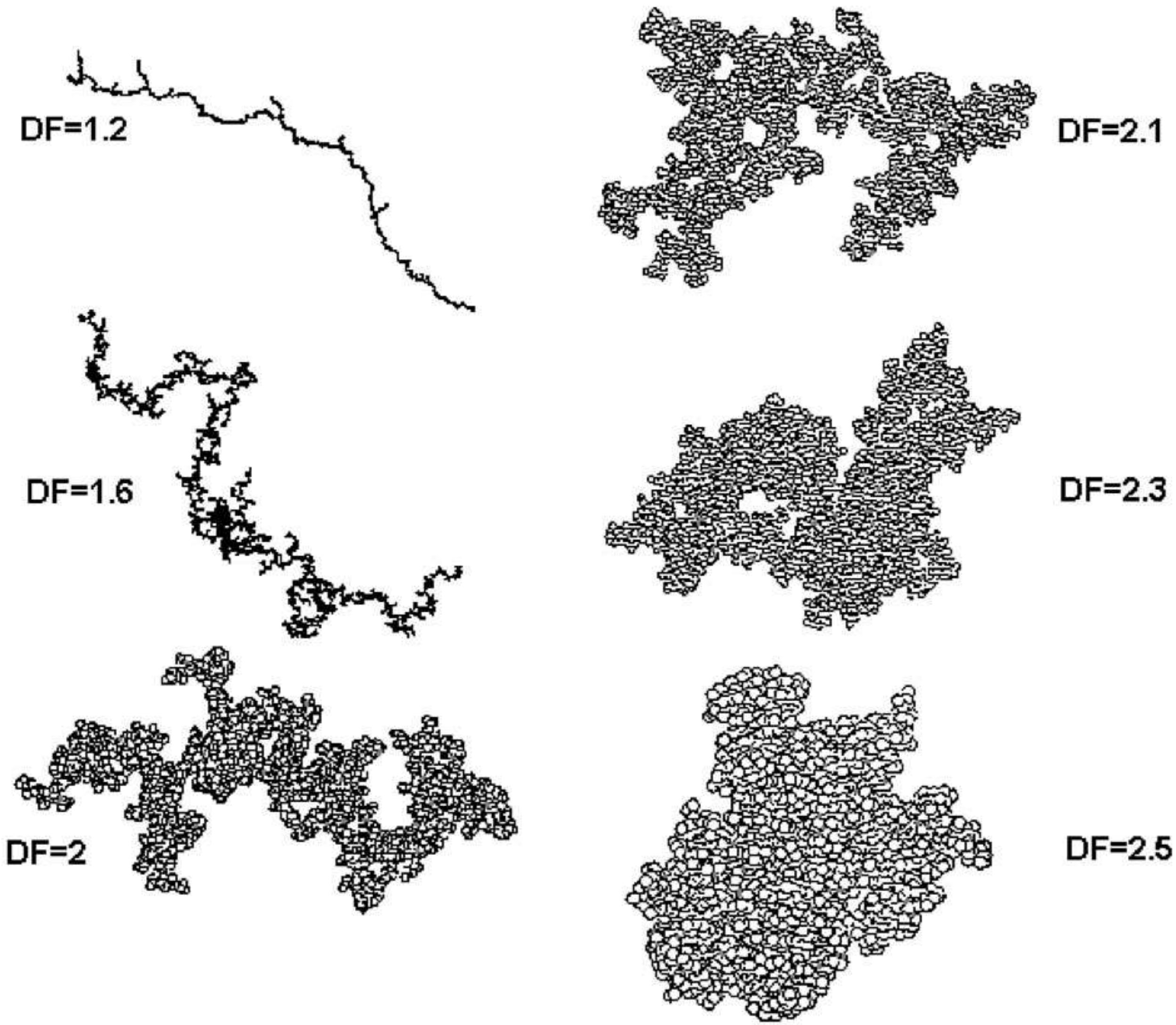
Спасибо за внимание!







Малоугловое рассеяние нейтронов



Модель неограниченных фракталов

Объемные

$I \sim Q^{-D}$	$1 \leqslant D < 3$
$D_m = D$	$\rho(r) \sim r^{D_m}$

Поверхностные

$I \sim Q^{-D}$	$3 < D \leqslant 4$
$D_s = 6 - D$	$S(r) \sim r^{D_s}$