

# Киральность и топологические свойства магнитных текстур

Константин Л. Метлов

9 марта 2017 г.

Магнетизм

Магниты

Bitter

Bitter

Bitter

Домены

Границы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

# Магнетизм

Магнетизм

Магниты

Bitter

Bitter

Bitter

Домены

Границы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

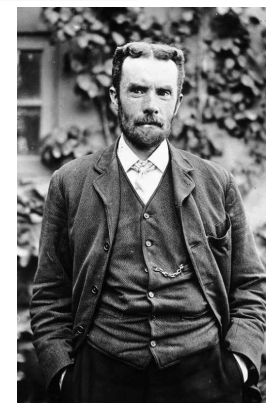
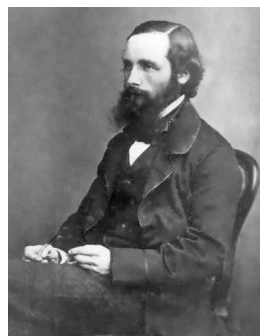
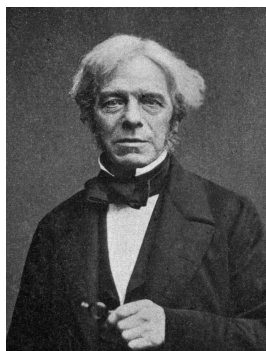
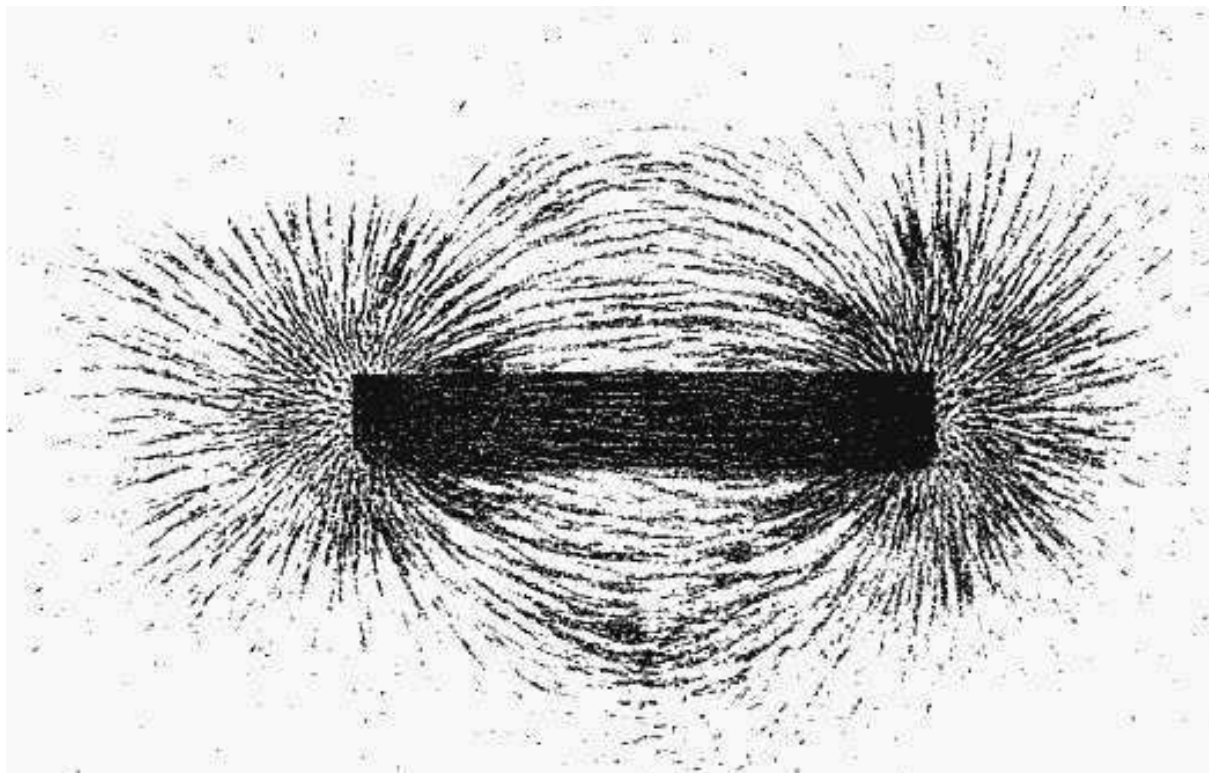
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Магниты

Bitter

Bitter

Bitter

Домены

Границы

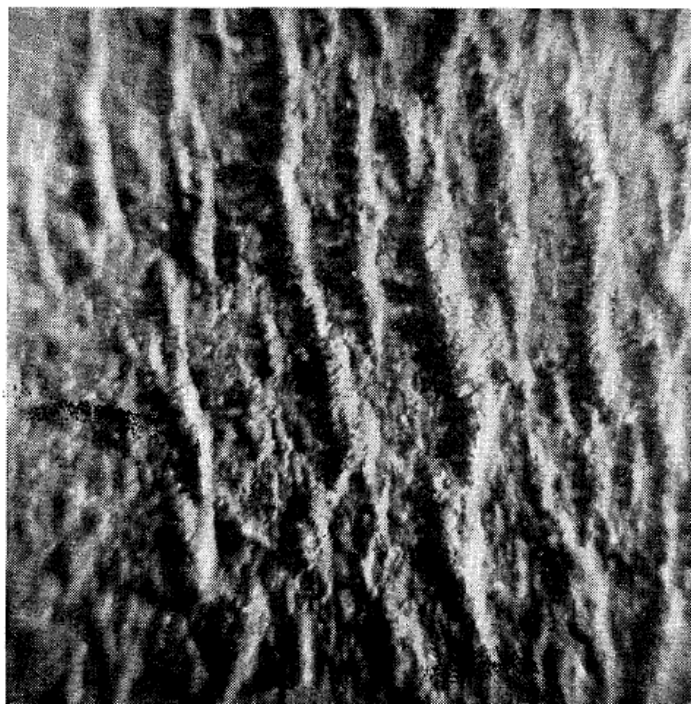
МикромагнетизмНано-магнетизмНано-элементыНано-магнетизмПримерыТопологияДинамикаКиральность.Magnetism@homeВыводы

Fig. 1. Patterns obtained on an iron-silicon alloy in large fields. Magnification  $\times 16$ .

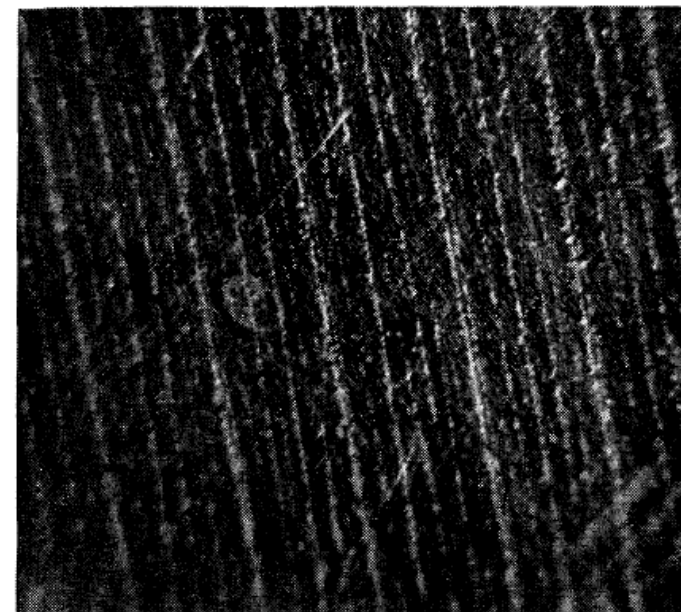


Fig. 5. Pattern obtained on the same grain as that shown in Fig. 4, but at a slightly higher magnetization. Magnification  $\times 16$ .

In all figures the magnetic field is in this  $\rightarrow$  direction.

F. Bitter, Phys. Rev. 38, 1903 (1931)

Магнетизм

Магниты

Bitter

Bitter

Bitter

Домены

Границы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

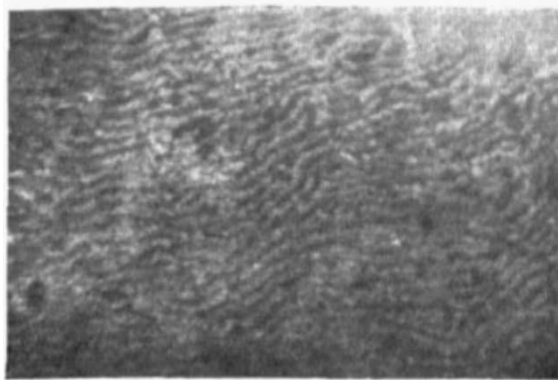
Топология

Динамика

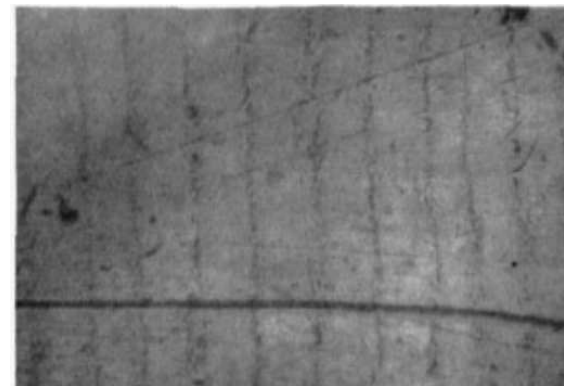
Киральность.

Magnetism@home

Выводы



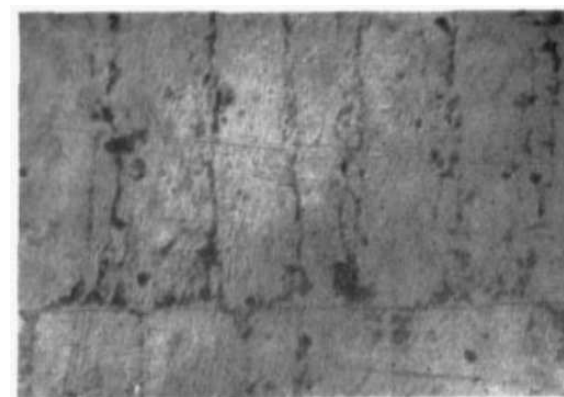
(a) Maze pattern found after electrolytic polishing but before annealing.



(c) (111) plane.  
Field 250 oersteds→

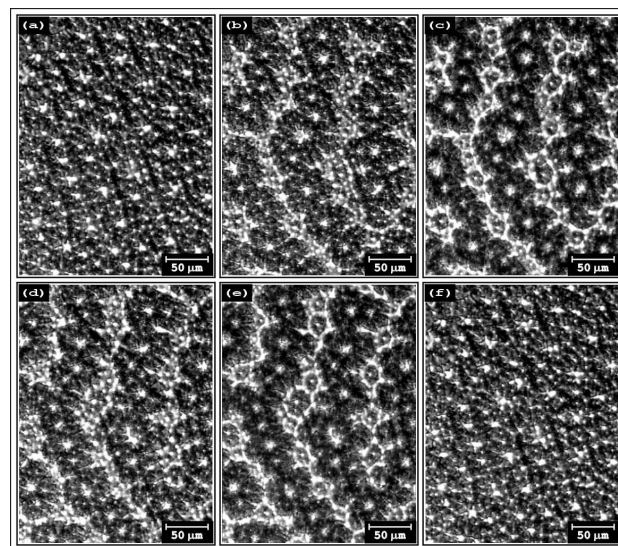
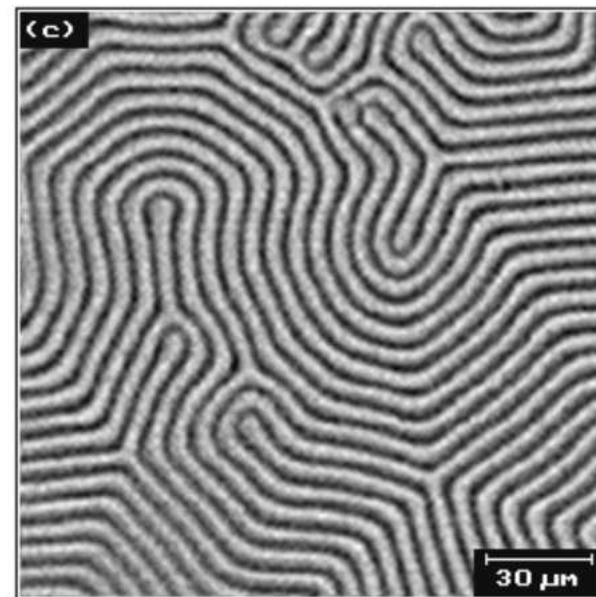
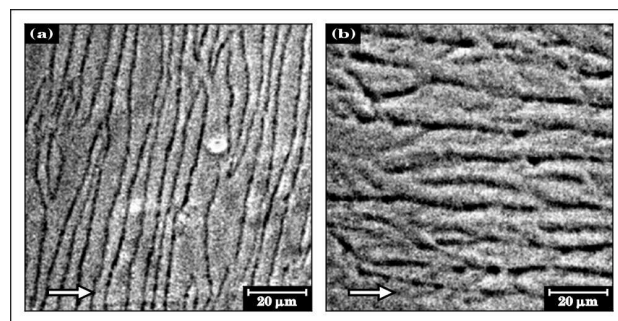


(e) Complicated closure pattern on side of crystal, i.e. (112) plane.  
Field parallel to [110] direction→



(f) Pattern on (112) plane showing branching at grain boundary.

L.F. Bates, G.W. Wilson, Proc. Phys. Soc. A 64 691 (1951)

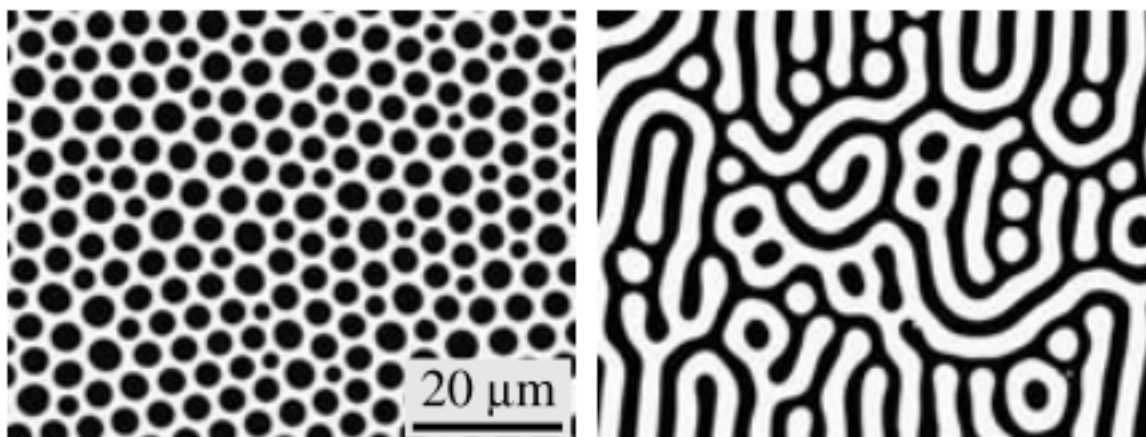
МагнетизмМагнитыBitterBitterBitterДоменыГраницыМикромагнетизмНано-магнетизмНано-элементыНано-магнетизмПримерыТопологияДинамикаКиральность.Magnetism@homeВыводы

W. Szmaja et al., J. Alloys Compd. 506 (2010) 526.  
 W. Szmaja, J. Magn. Mater. 234 (2001) 13.



a)

b)



c)

d)

A. Hubert, R. Schäfer, Magnetic Domains: The Analysis of Magnetic Microstructures, Springer, 1998.

Магнетизм

Магниты

Bitter

Bitter

Bitter

Домены

Границы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Магнетизм

Магниты

Bitter

Bitter

Bitter

Домены

Границы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

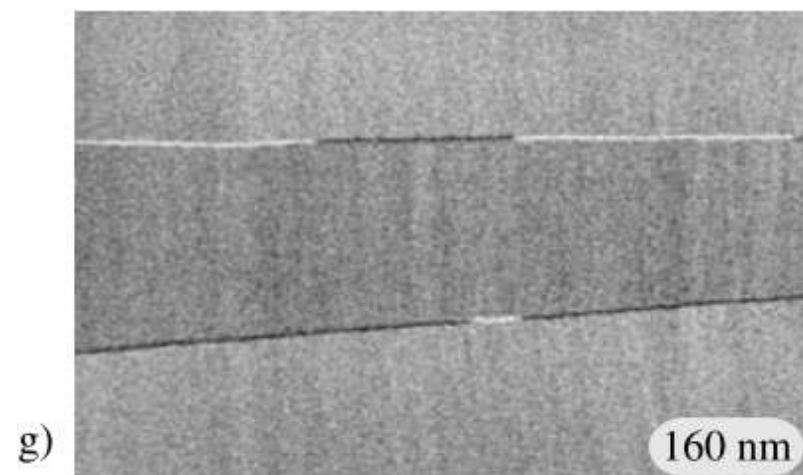
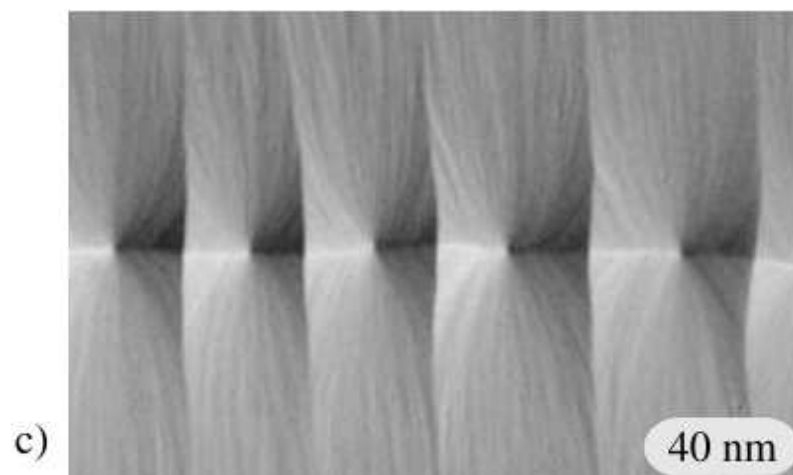
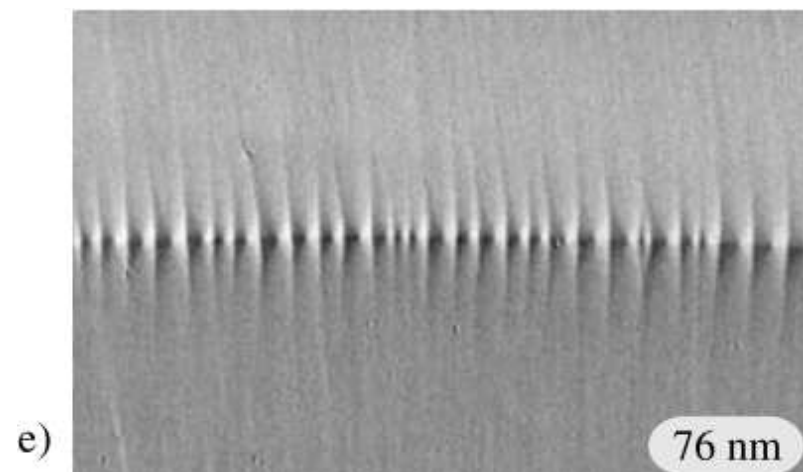
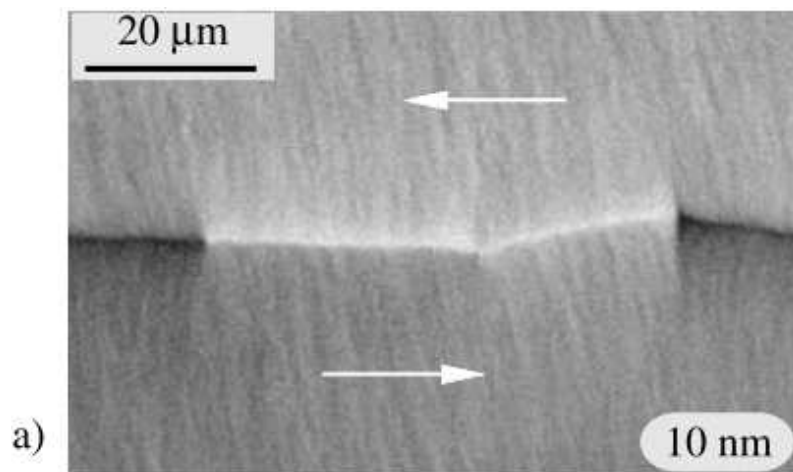
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



A. Hubert, R. Schäfer, Magnetic Domains: The Analysis of Magnetic Microstructures, Springer, 1998.



Магнетизм

Микромагнетизм

Персоналии

Уравнения

Взаимодействия

Приложения

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

# Микромагнетизм

Магнетизм

Микромагнетизм

Персоналии

Уравнения

Взаимодействия

Приложения

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



L. Landau and E. Lifshitz, P. Z. der Sow., 8, 153 (1935).  
W. F. Brown, Micromagnetics, 1963.

$$\begin{aligned} |\vec{M}(\vec{r}, t)| &= M_S \\ E[\{\vec{M}\}] &= E_{\text{EX}} + E_{\text{A}} + E_{\text{Z}} + E_{\text{MS}} + \dots \\ \vec{H}_{\text{eff}} &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\delta E[\{\vec{M}\}]}{\delta \vec{M}} \\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} &= -\gamma \vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}} - \lambda \vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}}) \end{aligned}$$

L. Landau and E. Lifshitz, P. Z. der Sow., 8, 153 (1935).  
W. Döring, Z. Naturforsch. A 3, 373 (1948).  
T.L. Gilbert, A Lagrangian formulation of the gyromagnetic equation of the magnetic field, Phys. Rev. 100, 1243(1955).

Магнетизм

Микромагнетизм

Персоналии

Уравнения

Взаимодействия

Приложения

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Магнетизм

Микромагнетизм

Персоналии

Уравнения

Взаимодействия

Приложения

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

$$\begin{aligned}E_{\text{EX}} &= \frac{C}{2} \iiint_V \sum_{i=X,Y,Z} (\vec{\nabla} M_i)^2 d^3\vec{r} \\E_{\text{MS}} &= -\frac{1}{2}\mu_0 \iiint_V \frac{\vec{H}_D[\vec{M}] \cdot \vec{M}}{2} d^3\vec{r} \\E_Z &= -\mu_0 \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{M} d^3\vec{r} \\E_{\text{DM}} &= D \iiint_V \vec{M} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}) d^3\vec{r} \\&\dots\end{aligned}$$

где  $\vec{H}_D = \vec{\nabla} u(\vec{r})$ ,  $\vec{\nabla}^2 u = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$  с граничным условием  $\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} |\vec{r}|u, |\vec{r}|^2|\vec{\nabla} u| < \infty$ .

# Магнитные интегральные схемы на ЦМД

Магнетизм

Микромагнетизм

Персоналии

Уравнения

Взаимодействия

Приложения

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

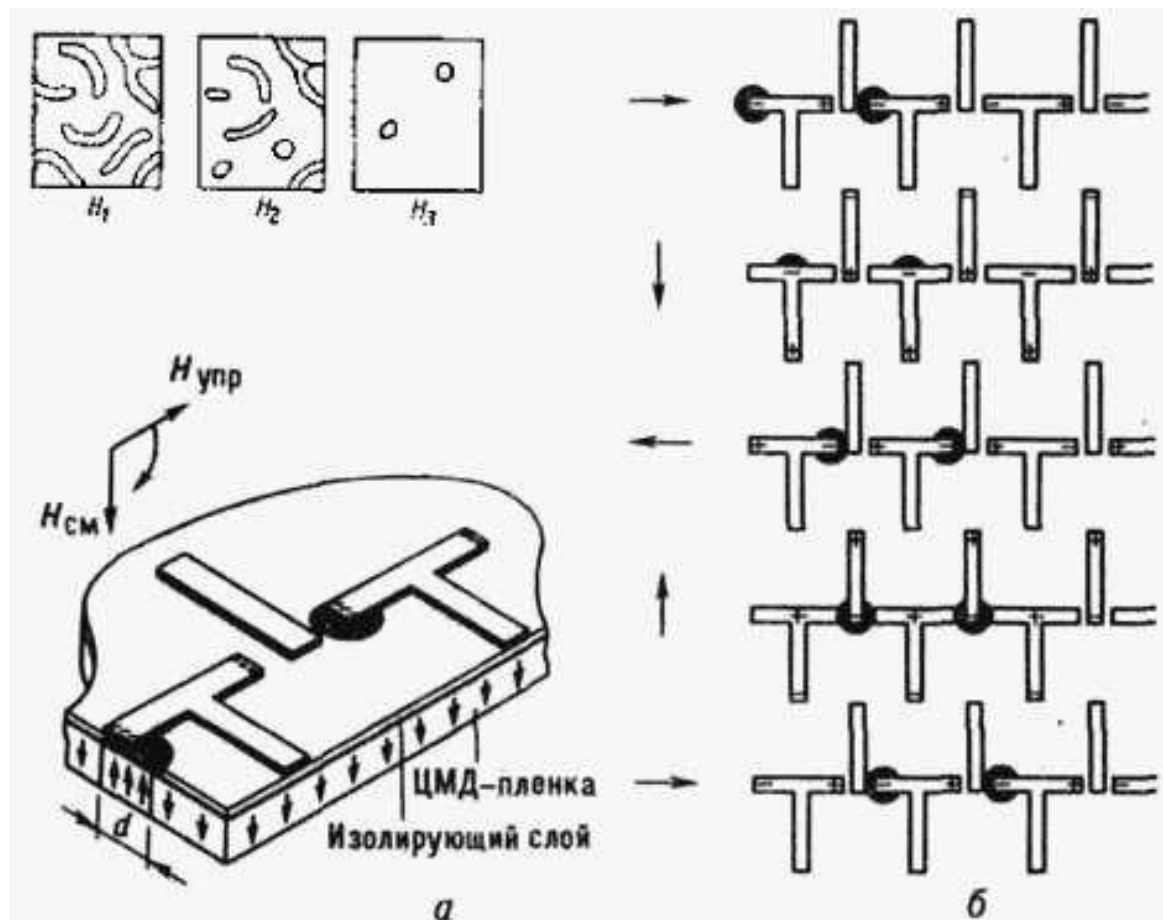
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

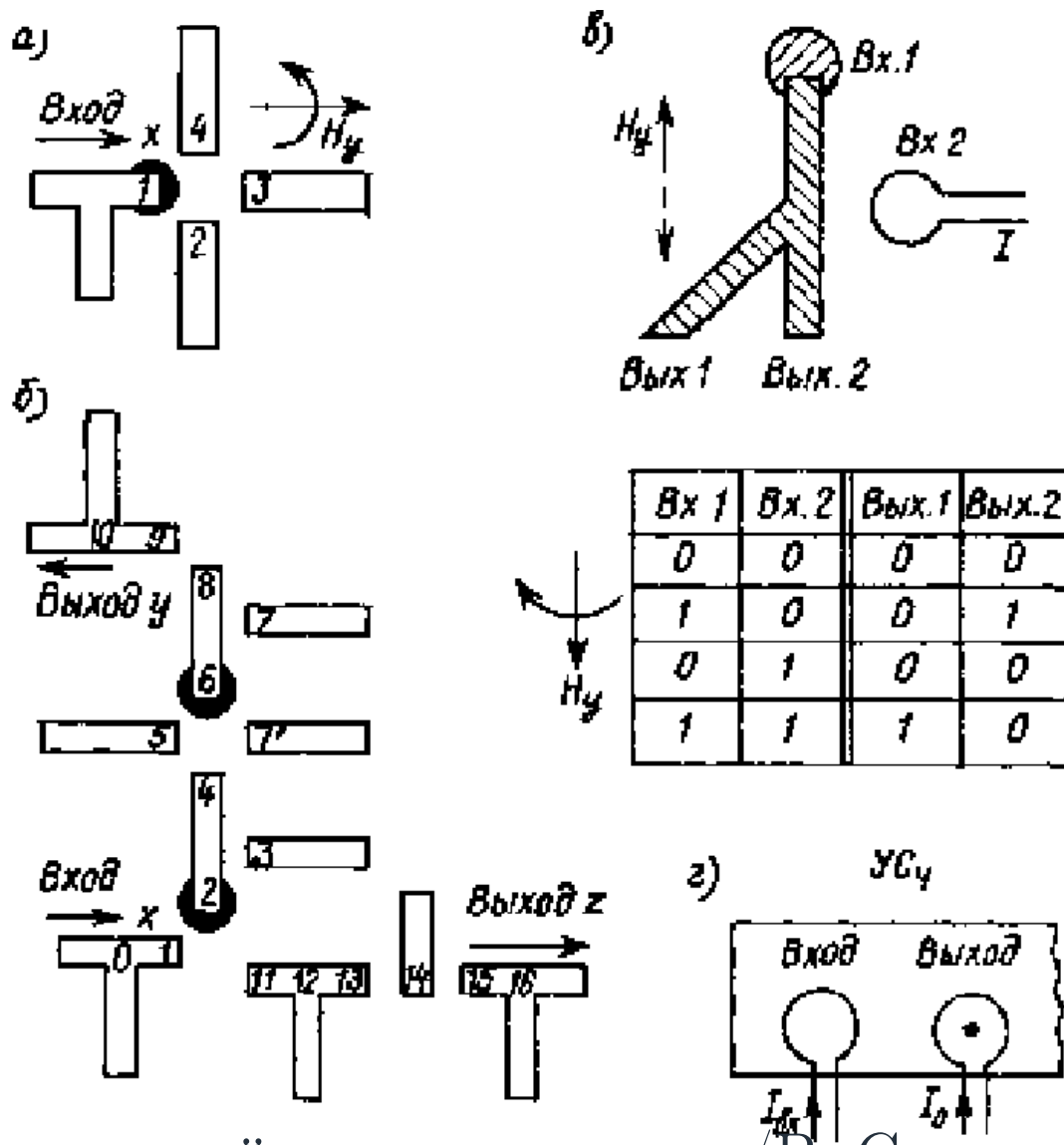


A. H. Bobeck and E. Della Torre, Magnetic Bubbles, Amsterdam: North-Holland, 1975

Элементы и устройства на цилиндрических магнитных доменах : Справочник; Под ред. Н.Н. Евтихиева, Б.Н. Наумова. - М. : Радио и связь, 1987.

# Магнитные интегральные схемы на ЦМД

- [Магнетизм](#)
- [Микромагнетизм](#)
- [Персоналии](#)
- [Уравнения](#)
- [Взаимодействия](#)
- [Приложения](#)
- [Нано-магнетизм](#)
- [Нано-элементы](#)
- [Нано-магнетизм](#)
- [Примеры](#)
- [Топология](#)
- [Динамика](#)
- [Киральность.](#)
- [Magnetism@home](#)
- [Выводы](#)



Элементы и устройства автоматики/В. С.

Подлипенский, КХ А. Сабинин, Л. Ю. Юрчук; Учебник

для вузов. — СПб.: Политехника, 1995. — 472 с. ил. Планарный микромагнетизм — slide 14

# Магнитные интегральные схемы на ЦМД

Магнетизм

Микромагнетизм

Персоналии

Уравнения

Взаимодействия

Приложения

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Эти и другие многочисленные элементы (см. [5, 32 и др.]) позволяют создавать разнообразные логические и запоминающие ЦМД-устройства, отличающиеся высокой плотностью размещения информации (до  $10^7$ – $10^8$  бит/см<sup>2</sup>), открывающей возможности микроминиатюризации, недостижимые для полупроводниковой микроэлектроники; малым энергопотреблением (до 0,5–2 мкВт/бит, что примерно в 50–200 раз меньше, чем для полупроводниковых ЗУ), практически снимающим проблемы теплоотвода; высокой скоростью переработки информации (до  $10^7$  бит/с); высокой надежностью, которая обеспечивается отсутствием необходимости преобразования и усиления сигналов, передаваемых от одних элементов к другим; ... Все это дает основания рассматривать ЗУ на ЦМД в качестве основной элементной базы ЭВМ следующих поколений.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

# Нано-магнетизм



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Основными взаимодействиями, всегда присутствующими в ферромагнетике, являются обменное и магнитодипольное. Их относительную силу можно охарактеризовать параметром с размерностью длины:

$$L_E = \sqrt{\frac{C}{\mu_0 M_S}}$$

Для большинства известных магнитомягких материалов  $L_E$  порядка десятка(ов) нанометров.

“Нано-магнетизм” это микромагнетизм, когда размеры магнетика сопоставимы с  $L_E$ . Тогда обмен доминирует.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Рассмотрим тонкую плёнку с толщиной  $\approx L_E$ .

Длина вектора намагниченности фиксирована  $|\vec{M}| = M_S$ ,  $\vec{m} = \vec{M}/M_S$ ,  $|\vec{m}| = 1$ . Это можно учесть автоматически, записав его (чисто формально) в виде

$$\begin{aligned} m_X + im_Y &= \frac{2w(z, \bar{z})}{1 + |w(z, \bar{z})|^2} \\ m_Z &= \frac{1 - |w(z, \bar{z})|^2}{1 + |w(z, \bar{z})|^2}, \end{aligned}$$

где  $w(z, \bar{z})$  – комплексная функция комплексного переменного (не обязательно аналитическая, т.е. не обязательно дифференцируемая) а линия обозначает комплексное сопряжение  $\bar{z} = X - iY$ .

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Вводя операторы комплексного дифференцирования  $\partial/\partial z = (\partial/\partial X - i\partial/\partial Y)/2$ ,  $\partial/\partial \bar{z} = (\partial/\partial X + i\partial/\partial Y)/2$ , обменную энергию можно представить в виде

$$\sum_{i=X,Y,Z} (\vec{\nabla} m_i)^2 = \frac{8}{(1 + w\bar{w})^2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right).$$

Уравнение Эйлера для экстремума этого функционала имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{2\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}.$$

Gordon Woo, Pseudoparticle configurations in two-dimensional ferromagnets, Journal of Mathematical Physics 18(6), AIP, 1264 (1977).

МагнетизмМикромагнетизмНано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементыНано-магнетизмПримерыТопологияДинамикаКиральность.Magnetism@homeВыводы

Уравнение Эйлера для экстремума обменного функционала имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{2\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}.$$

Очевидно, что любая аналитическая функция комплексного переменного  $w(z, \bar{z}) = f(z)$  является решением этого уравнения !

А.А. Белавин, А.М. Поляков, Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика, Письма в ЖЭТФ 22, 503(1975).

T.H.R. Skyrme, A unified field theory of mesons and baryons, Nucl. Phys. 31, 556 (1962).

# стенка с перетяжками

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

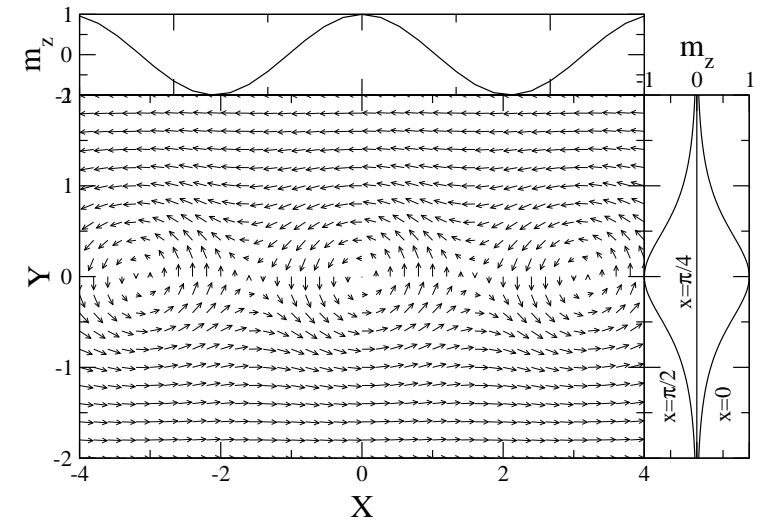
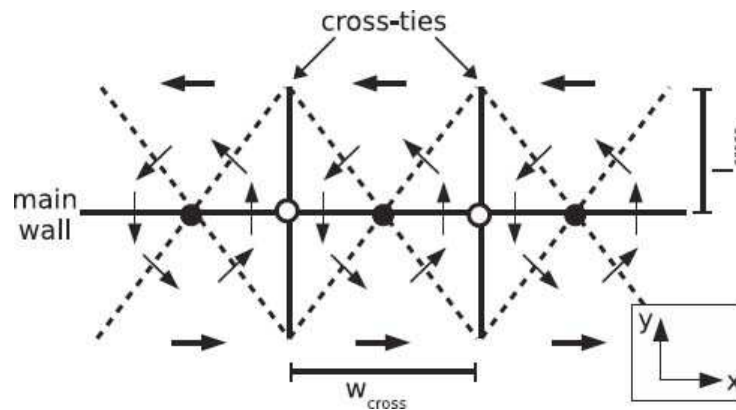
Топология

Динамика

Киральность.

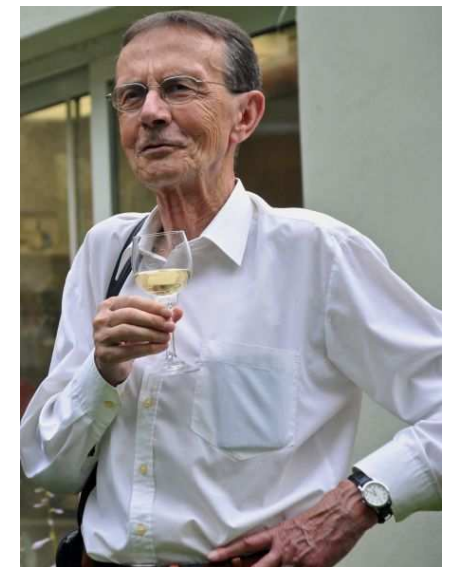
Magnetism@home

Выводы



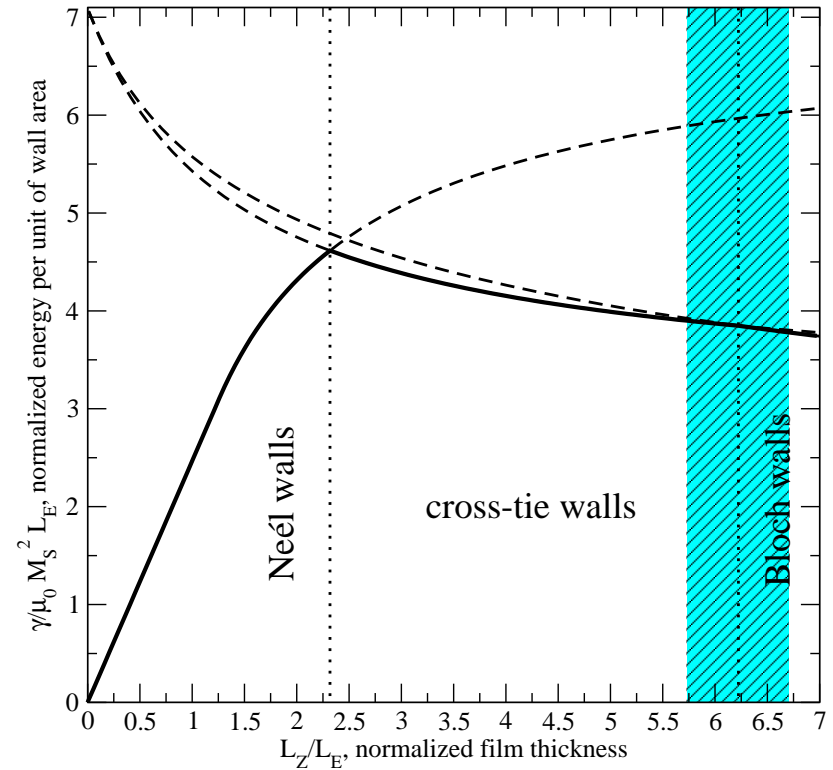
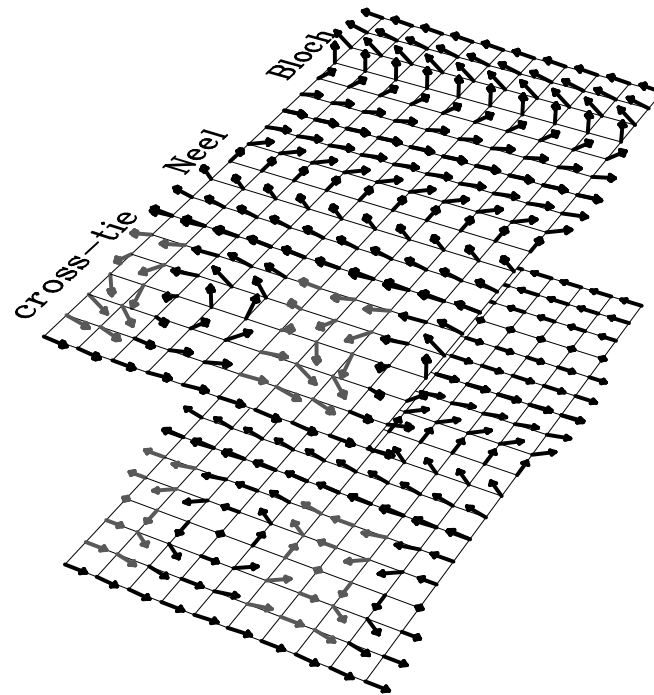
$$w(z, \bar{z}) = i \tan(z/c)$$

K.L. Metlov,  
Simple analytical description  
of the cross-tie domain wall structure,  
Appl. Phys. Lett. 79(16), 2609(2001).



V. Kamberský, 1935-2014

# стенка с перетяжками



Amikam Aharoni, Introduction to the theory of ferromagnetism, Oxford University Press, 1996.

K.L. Metlov, Cross-tie domain wall ground state in thin films, Journal of Low Temperature Physics 139(1), 207(2005).

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

обм. длина

обм. энергия

солитоны

cross-tie

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Диски

Многоугольники

Кольца

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

# Магнитные нано-элементы

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Диски

Многоугольники

Кольца

Нано-магнетизм

Примеры

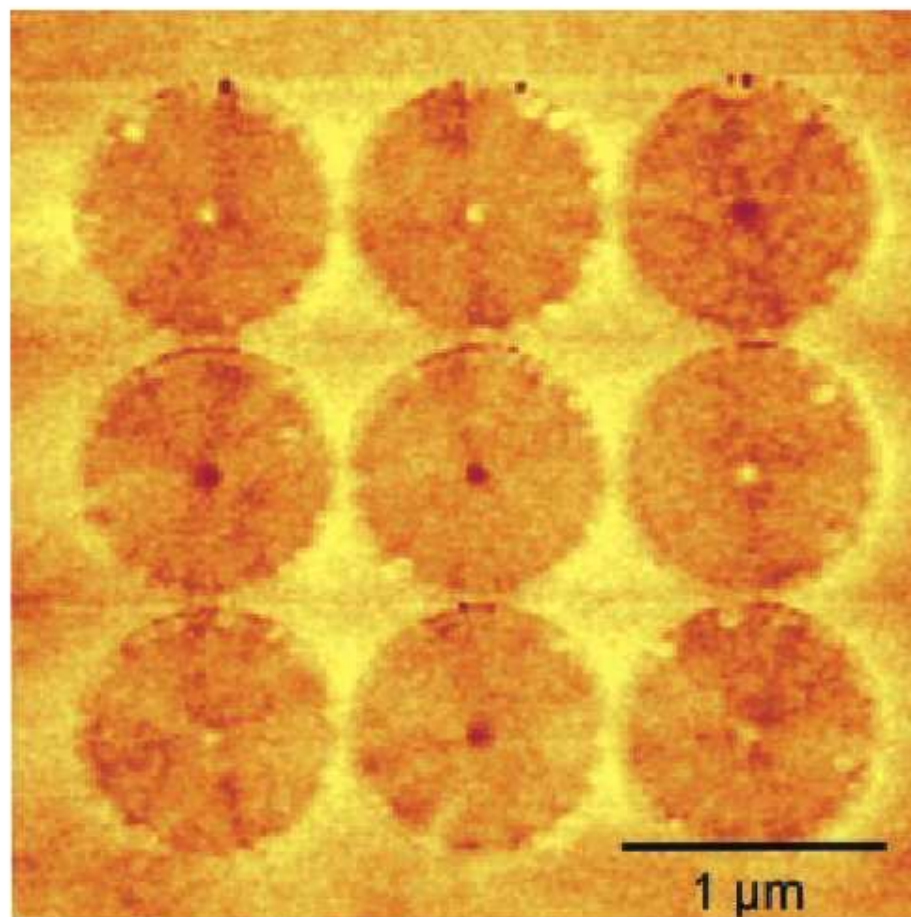
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



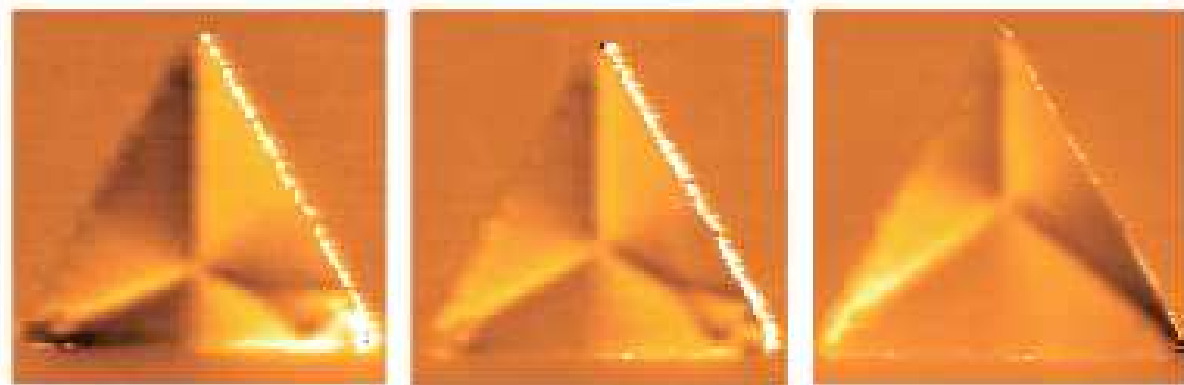
**Fig. 2.** MFM image of an array of permalloy dots 1  $\mu\text{m}$  in diameter and 50 nm thick.

T. Shinjo et al., Science, 289, pp. 930-932 (2000).



# Многоугольники

- Магнетизм
- Микромагнетизм
- Нано-магнетизм
- Нано-элементы
- Диски
- Многоугольники
- Кольца
- Нано-магнетизм
- Примеры
- Топология
- Динамика
- Киральность.
- Magnetism@home
- Выводы



$H_{ext} = 90 \text{ Oe}$        $H_{ext} = 0 \text{ Oe}$        $H_{ext} = -90 \text{ Oe}$

M. Miyata et al., Intermag 2011

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Диски

Многоугольники

Кольца

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

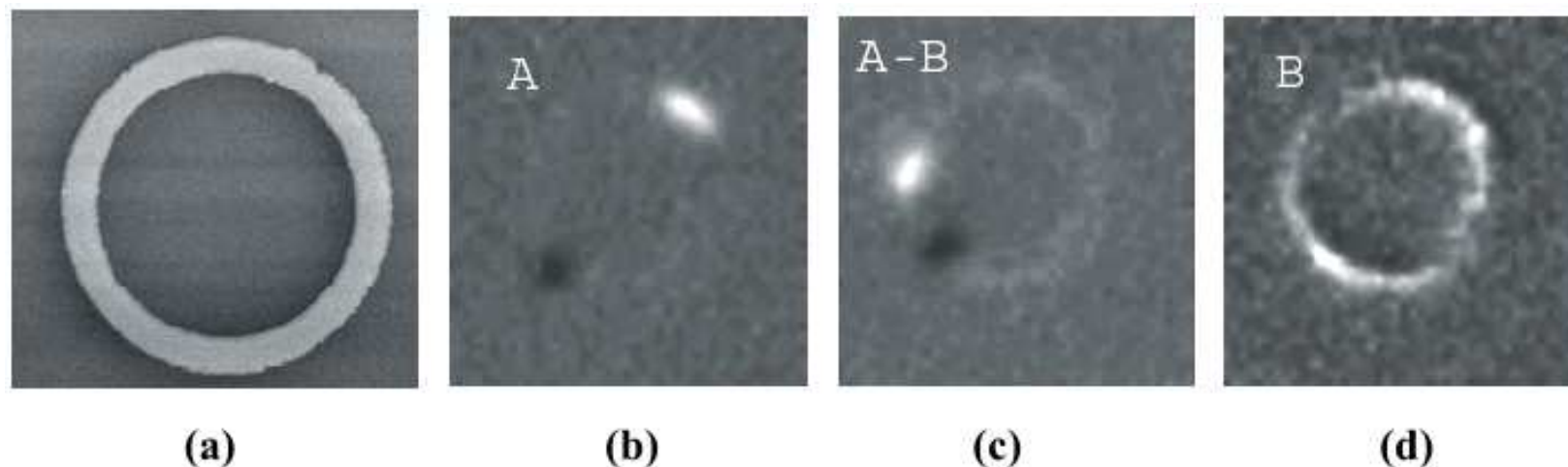


Figure 1. Magnetization reversal process in the circular permalloy narrow ring: from onion (A) to vortex state (B) through domain wall propagation (A-B). (a) Scanning electron microscopy (SEM) image of a narrow permalloy ring; (b) MFM image of onion state (A) in the circular permalloy narrow ring; (c) MFM at  $H = 25$  Oe; (d) MFM image of the vortex state (B),  $H=60$  Oe [39].

J. Sautner et al., pp. 427-457 in ISBN: 978-81-7895-373-1, 2008

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

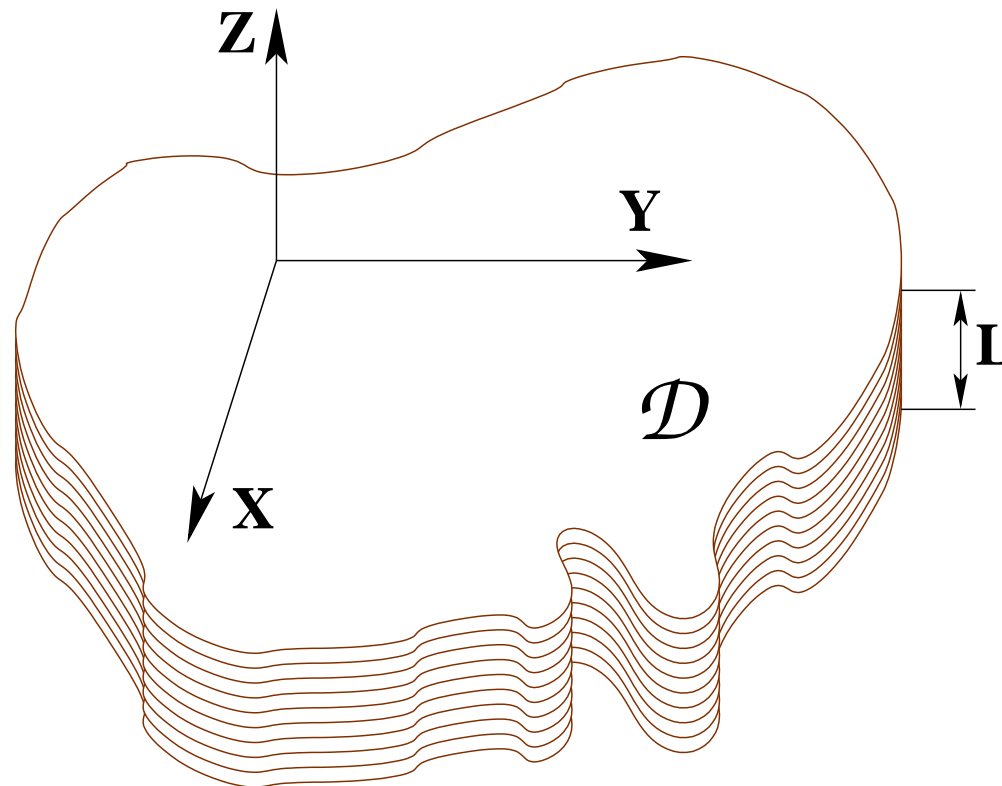
Примеры

Топология

# Нано-магнетизм планарных ЭЛЕМЕНТОВ

# Плоский цилиндр

Найти равновесное (метастабильное) распределение вектора намагниченности в плоском (тонком) ферромагнитном (из идеально мягкого материала) цилиндре.



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

В континуальном приближении

$$\frac{e[\vec{m}]}{\mu_0 M_S^2} = \iiint_{D,L} \left\{ \frac{L_E^2}{2} \sum_{i=X,Y,Z} (\vec{\nabla} m_i)^2 - \vec{h}_D[\vec{m}] \cdot \vec{m} \right\} d^3 \vec{r},$$

где  $L_E = \sqrt{C/(\mu_0 M_S^2)}$  обменная длина,

$\vec{\nabla} = \{\partial/\partial X, \partial/\partial Y, \partial/\partial Z\}$ ,  $\vec{h}_D[\vec{m}]$  размагничивающее поле, созданное  $\vec{m}(\vec{r})$ .

Как говорилось, минимизировать такую энергию точно в общем случае не представляется возможным.

# Последовательная минимизация

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

Предположим наличие хорошо определенной иерархии энергий (какие-то слагаемые полной энергии более “важны”, чем другие).

Вместо минимизации суммы различных компонент энергии, будем минимизировать их поочередно, от более важных к менее важным.

Начнем с полного набора всех возможных векторных полей  $\vec{m}(\vec{r})$ . Просеем его, оставив только поля, соответствующие экстремуму самого важного слагаемого. Останется бесконечное множество полей. Повторим с менее важным слагаемым, и т.д.

Насколько далеко так можно продвинуться ?

Для достаточно маленького плоского нано-цилиндра.

1. Обменная энергия
2. Магнитостатическая энергия
  - (a) Поверхностные заряды
    - i. торцевые заряды
    - ii. боковые заряды
  - (b) Объемные заряды

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

Считаем, что толщина цилиндра мала по сравнению с обменной длиной.

Рассматриваем только однородные по толщине распределения намагниченности.

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial Z} = 0.$$

Тогда удобно (чисто формально) ввести комплексную координату

$$z = X + iY.$$



# Стереографическая проекция

Длина вектора намагниченности фиксирована  $|\vec{m}| = 1$ . Это можно учесть автоматически, записав его (чисто формально) в виде

$$m_X + im_Y = \frac{2w(z, \bar{z})}{1 + |w(z, \bar{z})|^2}$$
$$m_Z = \frac{1 - |w(z, \bar{z})|^2}{1 + |w(z, \bar{z})|^2},$$

где  $w(z, \bar{z})$  – комплексная функция комплексного переменного (не обязательно аналитическая, т.е. не обязательно дифференцируемая) а линия обозначает комплексное сопряжение  $\bar{z} = X - iY$ .

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
МероныТорцевые  
зарядыБоковые  
зарядызадача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

Вводя операторы комплексного дифференцирования  $\partial/\partial z = (\partial/\partial X - i\partial/\partial Y)/2$ ,  $\partial/\partial \bar{z} = (\partial/\partial X + i\partial/\partial Y)/2$ , обменную энергию можно представить в виде

$$\sum_{i=X,Y,Z} (\vec{\nabla} m_i)^2 = \frac{8}{(1 + w\bar{w})^2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right).$$

Уравнение Эйлера для экстремума этого функционала имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{2\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}.$$

Некоторые решения этого нелинейного уравнения известны.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{2\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}.$$

Солитоны (А.А. Белавин и А.М. Поляков)

$$w = f(z).$$

Мероны (Дэвид Гросс)

$$w = \frac{f(z)}{\sqrt{f(z)\bar{f}(\bar{z})}}.$$

D.J. Gross, Meron configurations in the two-dimensional  $O(3)$   $\sigma$ -model, Nuclear Physics B 132(5), 439–456, 1978.

Мерон  $|w| = 1$  не имеет торцевых зарядов, поскольку в нём  $m_Z = 0$ . Однако, обменная энергия мерона в окрестности нулей и полюсов  $f(z)$  расходится.

Представляя  $w(z, \bar{z})$  в виде

$$w(z, \bar{z}) = \begin{cases} f(z)/e_1 & |f(z)| \leq e_1 \\ f(z)/\sqrt{f(z)\bar{f}(\bar{z})} & e_1 < |f(z)| \leq e_2 \\ f(z)/e_2 & |f(z)| > e_2 \end{cases},$$

где  $f(z)$  – произвольная аналитическая функция, получим непрерывную функцию, сшивающую солитон и мерон, со свободными параметрами  $0 < e_1 < e_2 < \infty$ , позволяющими регулировать размер солитонных “шапок” вблизи нулей и полюсов  $f(z)$ .

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

Выбором (оставшейся произвольной) функции  $f(z)$  боковые заряды можно полностью убрать. Для этого необходимо решить краевую задачу Римана-Гильберта:

Найти аналитическую в  $\mathcal{D}$  функцию  $f(z)$ , такую что  $\operatorname{Re} [f(\zeta)\overline{n(\zeta)}] = 0$  (отсутствуют нормальные к границе компоненты), где  $\zeta \in \mathcal{C} = \partial\mathcal{D}$  – это граница  $\mathcal{D}$ , и  $n(\zeta) = n_x(\zeta) + in_y(\zeta)$  – комплексная нормаль к  $\mathcal{C}$ .

К сожалению, решение Привалова этой краевой задачи, опубликованное в книге Лаврентьева и Шабата “Методы теории функций комплексного переменного”, позволяет найти только подмножество возможных функций  $f(z)$ .

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

# задача Римана-Гильберта (решение Привалова)

$$f(t) = \frac{a_0 t^2 + a_1 t + a_2}{e^{F^+(t)}} + \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 t + \bar{a}_2 t^2}{e^{\overline{F^-(1/\bar{t})}}}$$
$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=1} \frac{\log[-\lambda^2 \overline{n_T(\lambda)}/n_T(\lambda)]}{\lambda - t} d\lambda,$$

$$F^+(t) = F(t), |t| < 1 \text{ and } F^-(t) = F(t), |t| > 1.$$

Вычисляя интегралы и упрощая

$$f(t) = (itc + A - \bar{A}t^2)T'(t),$$

где  $z = T(t)$  – конформное отображение  $|t| < 1 \rightarrow z \in \mathcal{D}$ ,  
 $c = \text{Im } a_1$  и  $A = \bar{a}_0 - a_2$  свободные параметры.

K.L. Metlov, Two-dimensional topological solitons in soft ferromagnetic cylinders, 2001, arXiv:cond-mat/0102311

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский

цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

# задача Римана-Гильберта (многовихревое решение)

Для верхней полуплоскости можно сразу записать:

$$f(t) = \frac{\sum_{i=0}^m g_i t^i}{\sum_{i=0}^n h_i t^i},$$

где  $g_i$  и  $h_i$  произвольные действительные числа.

Для произвольной формы торца частицы

$$f = T'(t) \frac{\prod_{i=0}^{m_p} (a_i - t)(\bar{a}_i - t) \prod_{j=0}^{m_r} (b_j - t)}{\prod_{i=0}^{n_p} (c_i - t)(\bar{c}_i - t) \prod_{j=0}^{n_r} (d_j - t)}$$

где  $z = T(t)$  конформно отображает верхнюю полуплоскость  $t$  на торец частицы  $z$ .

K.L. Metlov, Magnetization patterns in ferromagnetic nano-elements as functions of complex variable, Phys. Rev. Lett. 105, 107201(2010).

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

# задача Римана-Гильберта (многосвязная)

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

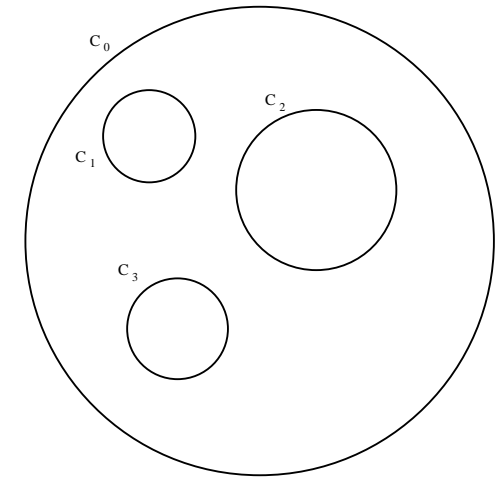
Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

Функцию Шоттки-Клейна  
можно представить себе как  
обобщение разности  $z - \zeta = w_1(z, \zeta)$ .



Для кольца, например

$$w_r(z, \zeta) = (z - \zeta) \frac{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k} z/\zeta)(1 - q^{2k} \zeta/z)}{(\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}))^2}$$

Darren Crowdy, The  
Schwarz–Christoffel mapping to bounded multiply  
connected polygonal domains, Proc. R. Soc. A 461(2061),  
2653(2005).



# задача Римана-Гильберта (многосвязная)

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Плоский  
цилиндр

Энергия

Последовательная  
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая  
проекция

Обмен

Солитоны и  
Мероны

Торцевые  
заряды

Боковые  
заряды

задача Римана-  
Гильберта

Примеры

Топология

$$f(z) = \frac{\partial}{\partial z} \log \left( \prod_m F_1(z, \zeta_{1,m}, \zeta_{2,m}) \prod_n F_2(z, \zeta_n) \right),$$

$$F_1(z, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{w(z, \zeta_1)}{w(z, \zeta_2)},$$

$$F_2(z, \zeta) = \frac{w(z, \zeta)w(z, 1/\bar{\zeta})}{w(z, \bar{\zeta})w(z, 1/\zeta)}.$$

Можно так же показать, что в многосвязной области

$$\#(\text{нулей } f(z)) - \#(\text{полюсов } f(z)) = \text{связность} - 2$$

A.V. Bogatyrev and K.L. Metlov, Magnetic states in multiply-connected flat nanoelements, Low Temperature Physics 41(10), 984(2015).

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Примеры.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Конформное отображение верхней полуплоскости на единичный диск имеет вид

$$T(t) = -\frac{e^{i\alpha}(h + it)}{h - it},$$

где  $h$  произвольный действительный параметр и  $\alpha \in [0, 2\pi)$ .

В случае  $m = 2, n = 0$  получим известные ранее решения.

$$f(z) = (izc + A - \bar{A}z^2),$$

где  $c$  и  $A$  произвольные действительный и комплексный параметры.  $A = 0$  дает анзац Усова и Песчаного для централизованного магнитного вихря.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

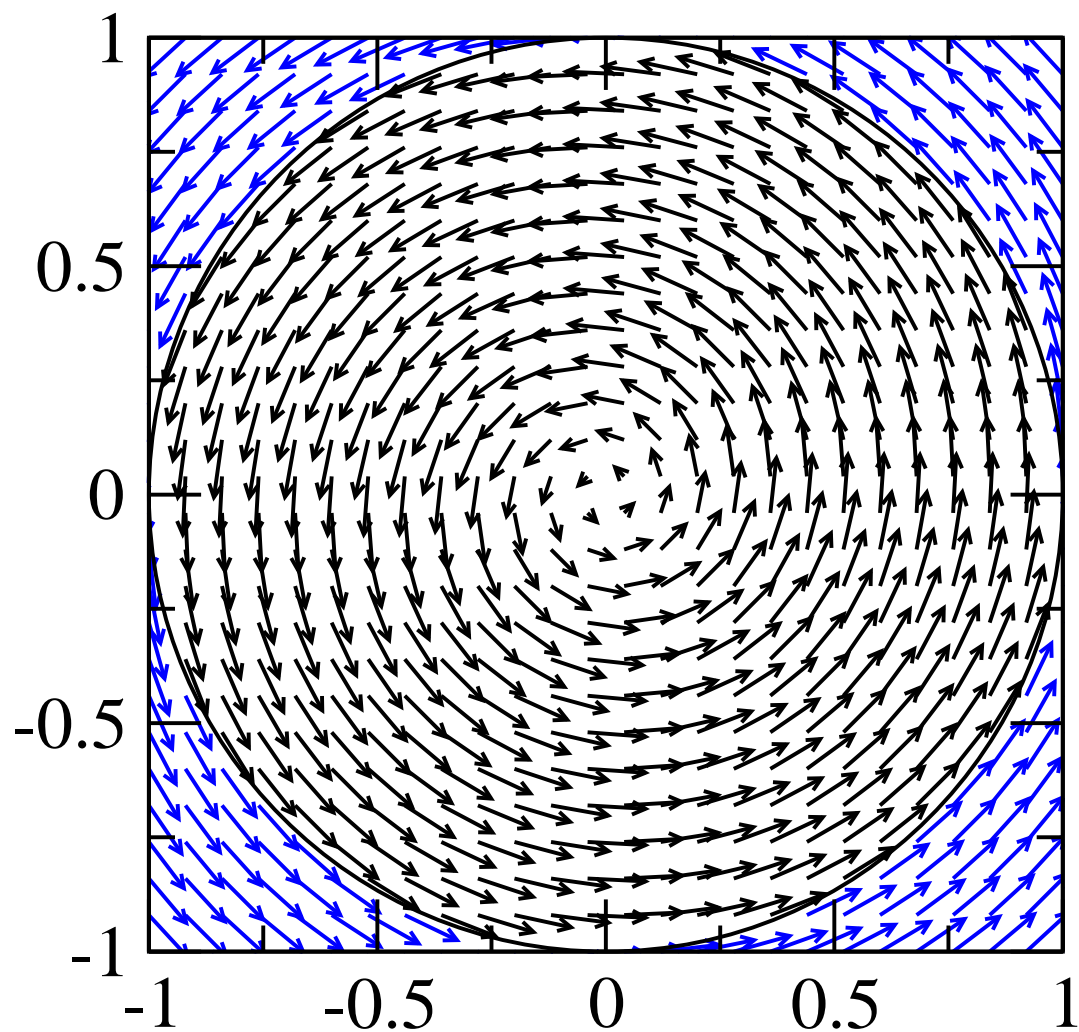
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

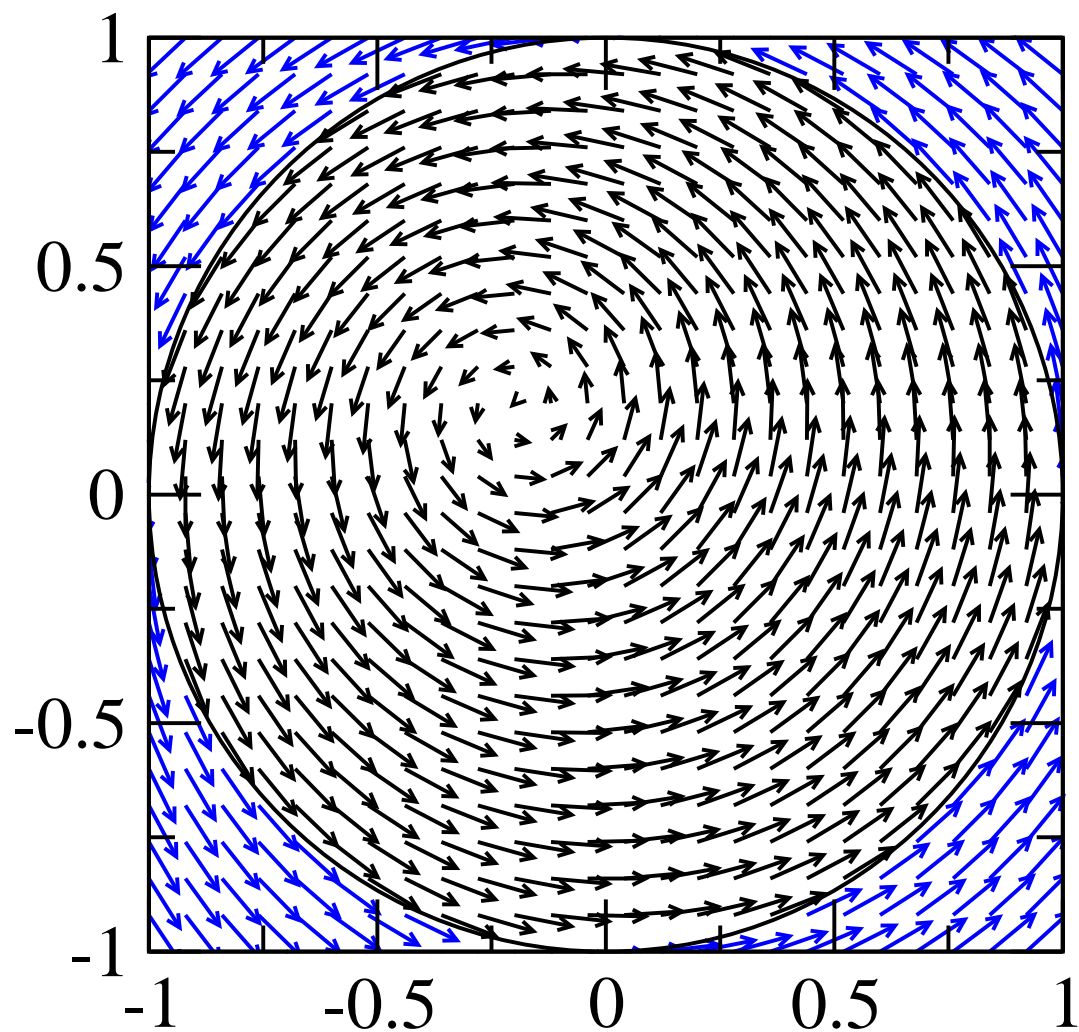
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

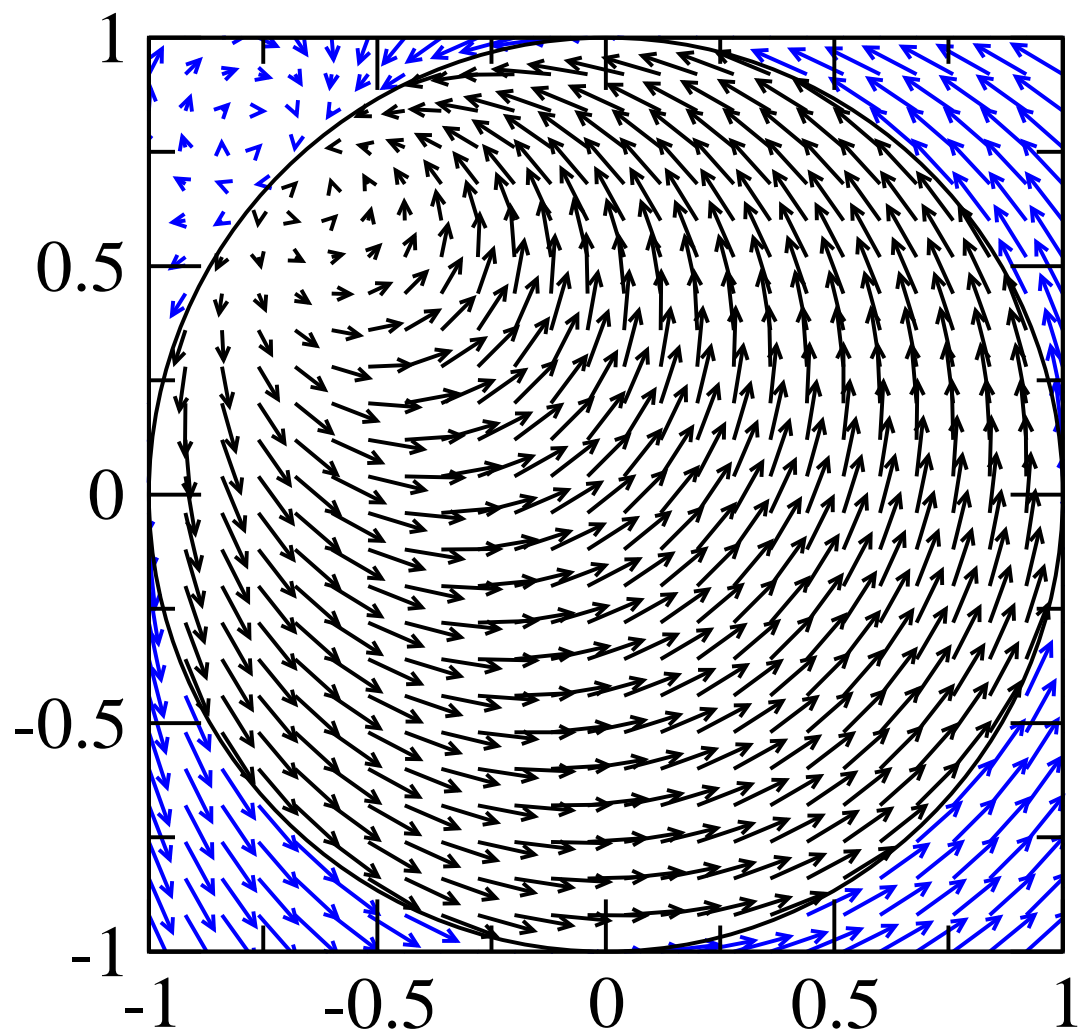
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

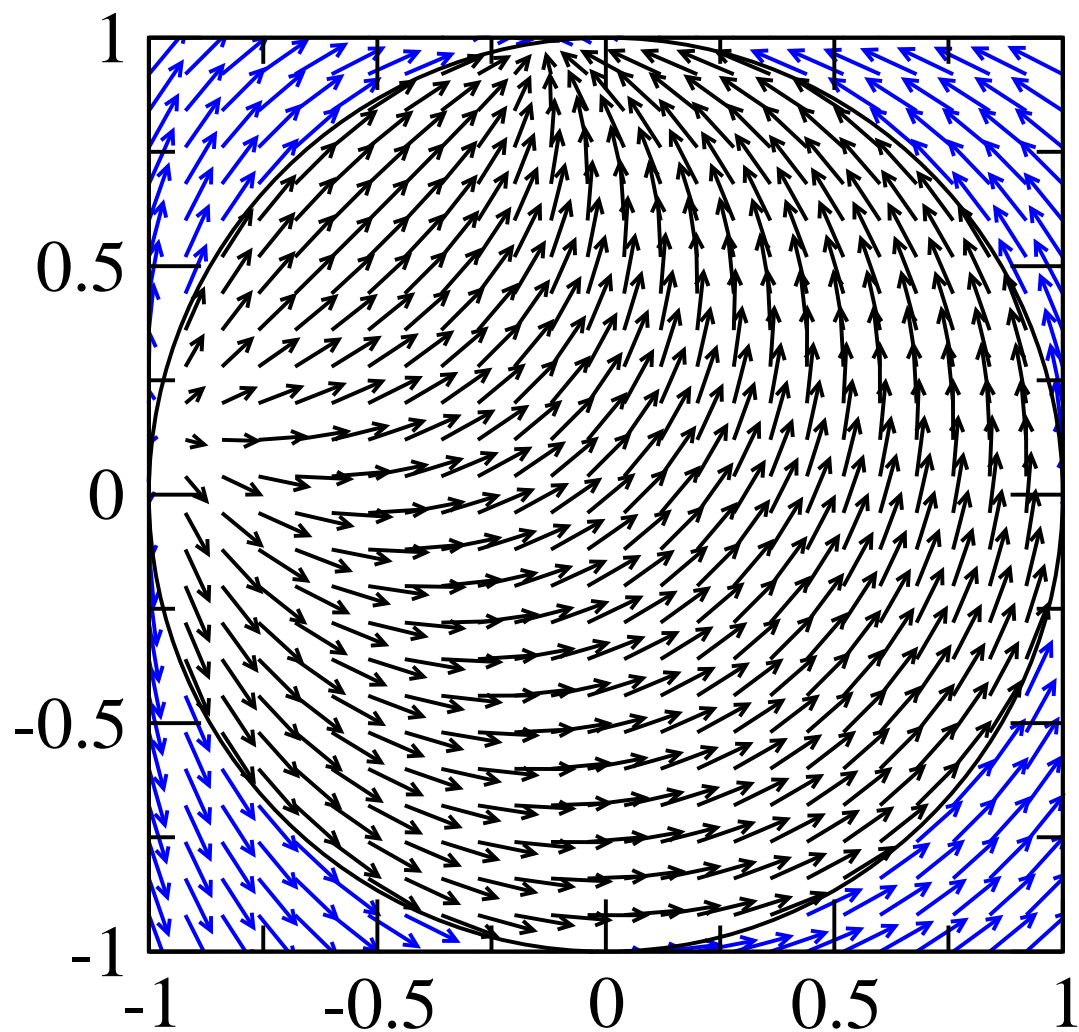
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

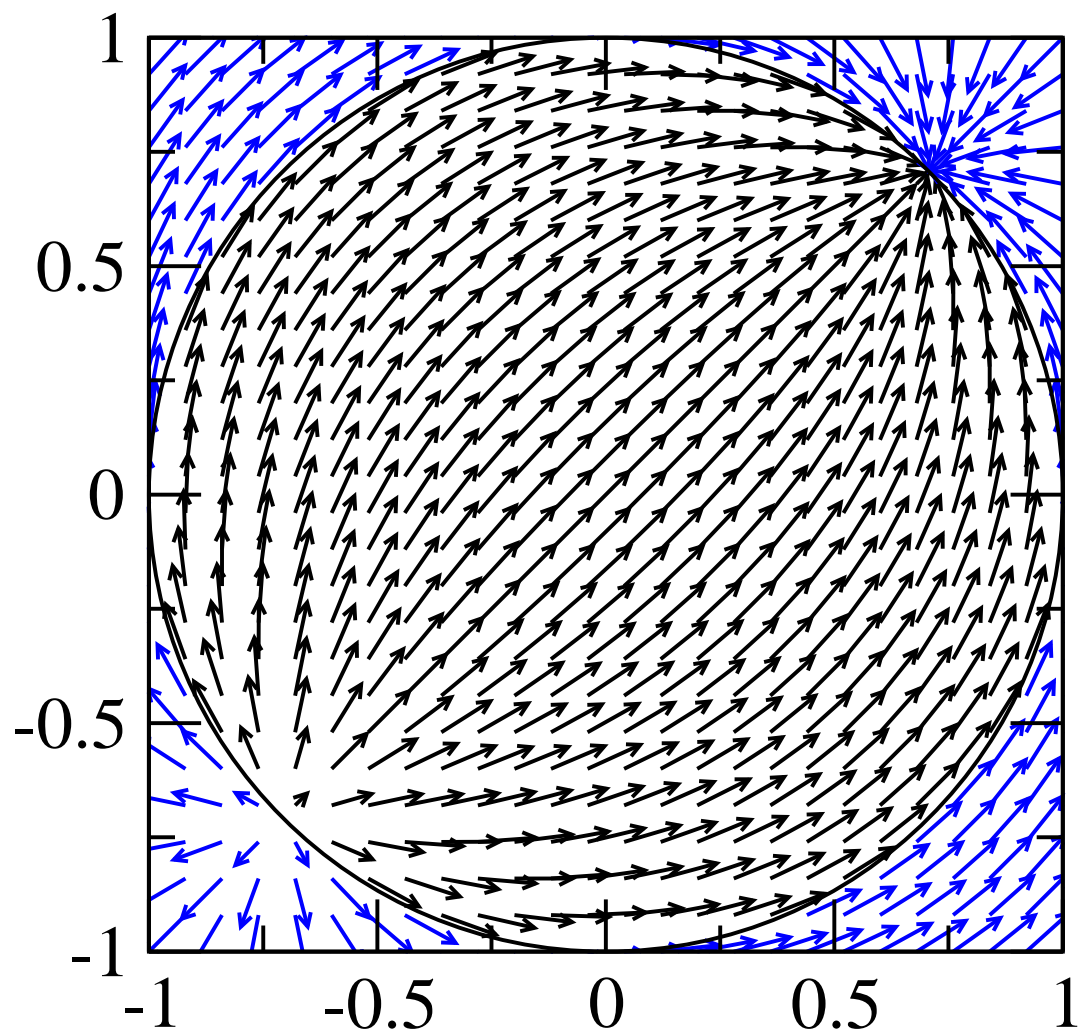
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы





Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

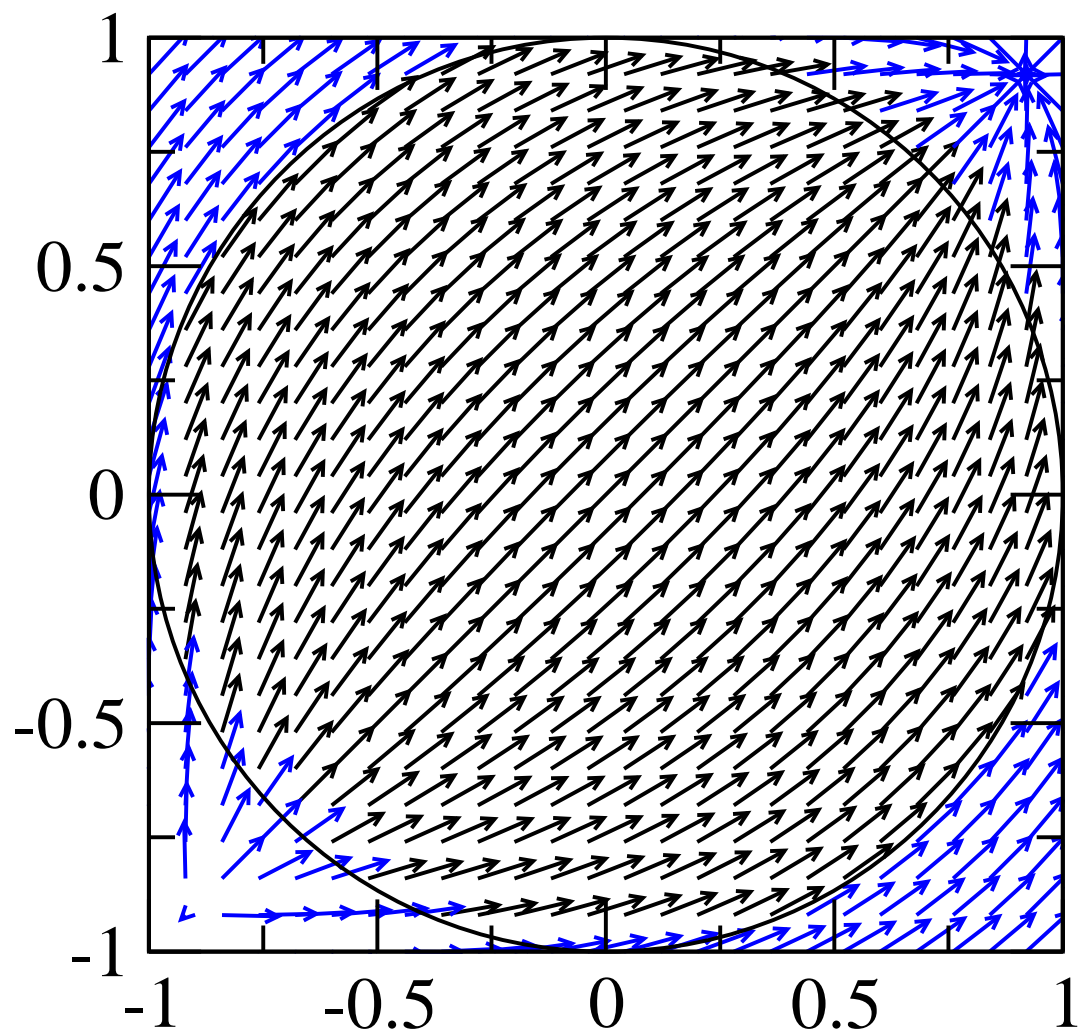
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



В случае бóльших значений  $m$  и  $n$  получим многовихревые состояния.

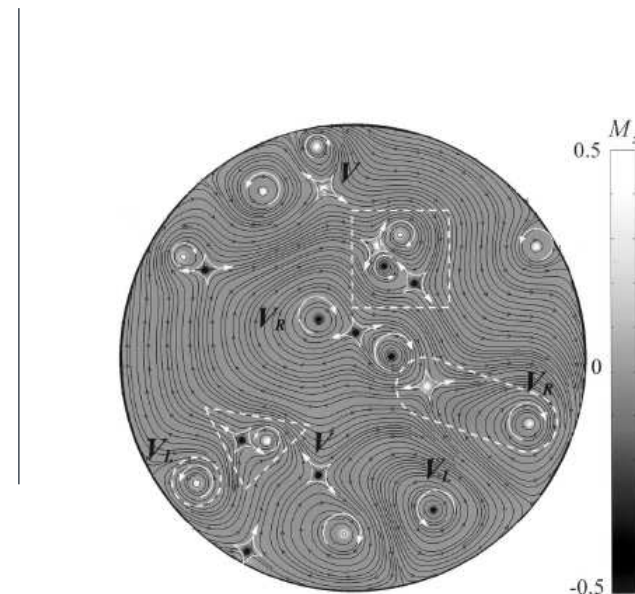
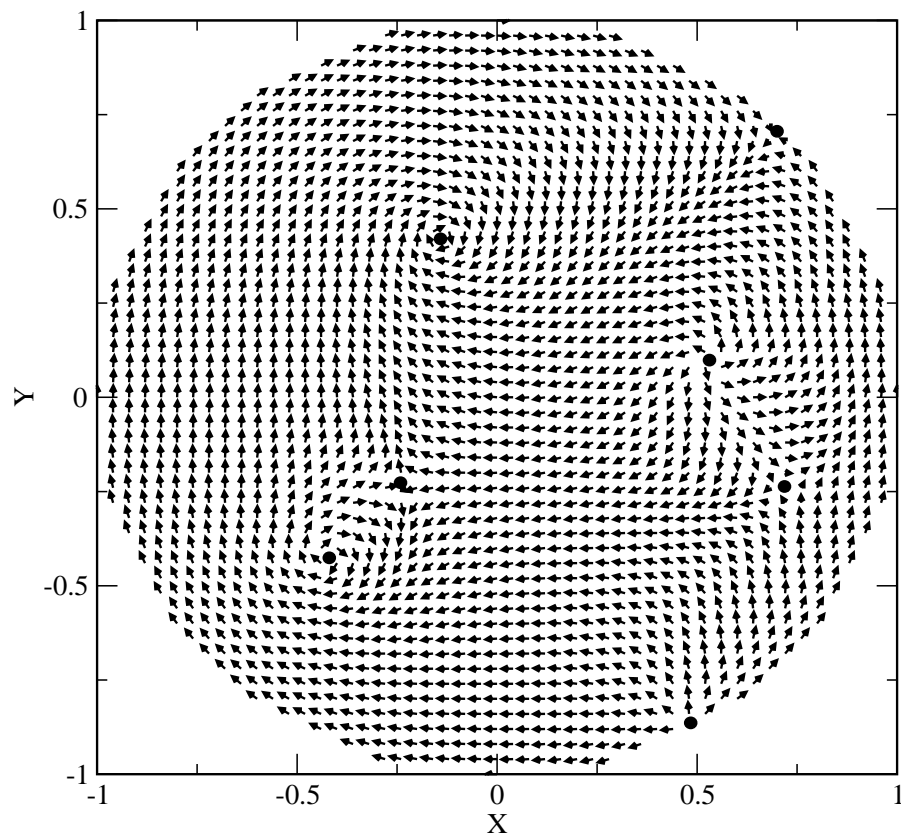


FIG. 1. The plane-view image of magnetic microstructures taken at  $t = 0.59$  ns during a relaxation dynamics approaching the equilibrium vortex state from an initial random in-plane  $M$ . The gray scale indicates the  $M_z$  component, while the contour lines with small arrows represent the in-plane directions of  $M$ . The white and black spots represent up and down core orientations of both types of  $V$  and  $\bar{V}$ . The characteristic structures of various vortex states are denoted by symbols as noted, which are described in the text. Dotted-lines of square, triangle, stadium, and circle shapes highlight the various features of vortices interacting with each other.

K.-S. Lee, B.-W. Kang, Y.-S. Yu and S.-K. Kim, Appl. Phys. Lett. 85, 1568 (2004).

- Магнетизм
- Микромагнетизм
- Нано-магнетизм
- Нано-элементы
- Нано-магнетизм
- Примеры
- Диск
- Треугольник
- Полоса
- Кольцо
- Трёхсвязная область
- Топология
- Динамика
- Киральность.
- Magnetism@home
- Выводы

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

Топология

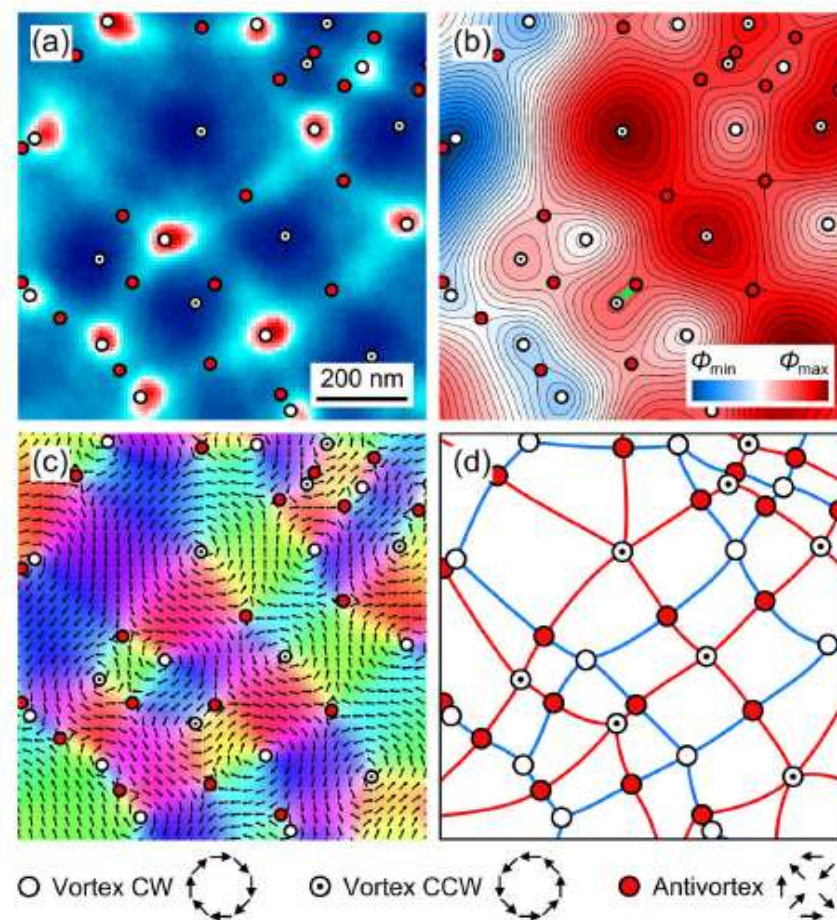
Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

FIG. 2. Magnetic network structure. (a),(c) Lorentz micrograph (a) and corresponding reconstructed in-plane magnetization (c) for the sample area indicated in Figs. 1(f) and 1(h)....



Tim Eggebrecht, et al, Light-Induced Metastable Magnetic Texture Uncovered by in situ Lorentz Microscopy, Phys. Rev. Lett. 118, 097203 (2017)

[Магнетизм](#)

[Микромагнетизм](#)

[Нано-магнетизм](#)

[Нано-элементы](#)

[Нано-магнетизм](#)

[Примеры](#)

[Диск](#)

[Треугольник](#)

[Полоса](#)

[Кольцо](#)

[Трёхсвязная  
область](#)

[Топология](#)

[Динамика](#)

[Киральность.](#)

[Magnetism@home](#)

[Выводы](#)

Конформное отображение верхней полуплоскости на равнобедренный треугольник дано

$$T(t) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6)} \int_0^t (1 - u^2)^{-2/3} du - \frac{i}{2\sqrt{3}},$$

где опущены дополнительные параметры, связанные со свободой выбора отображения верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость.

# Треугольник

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

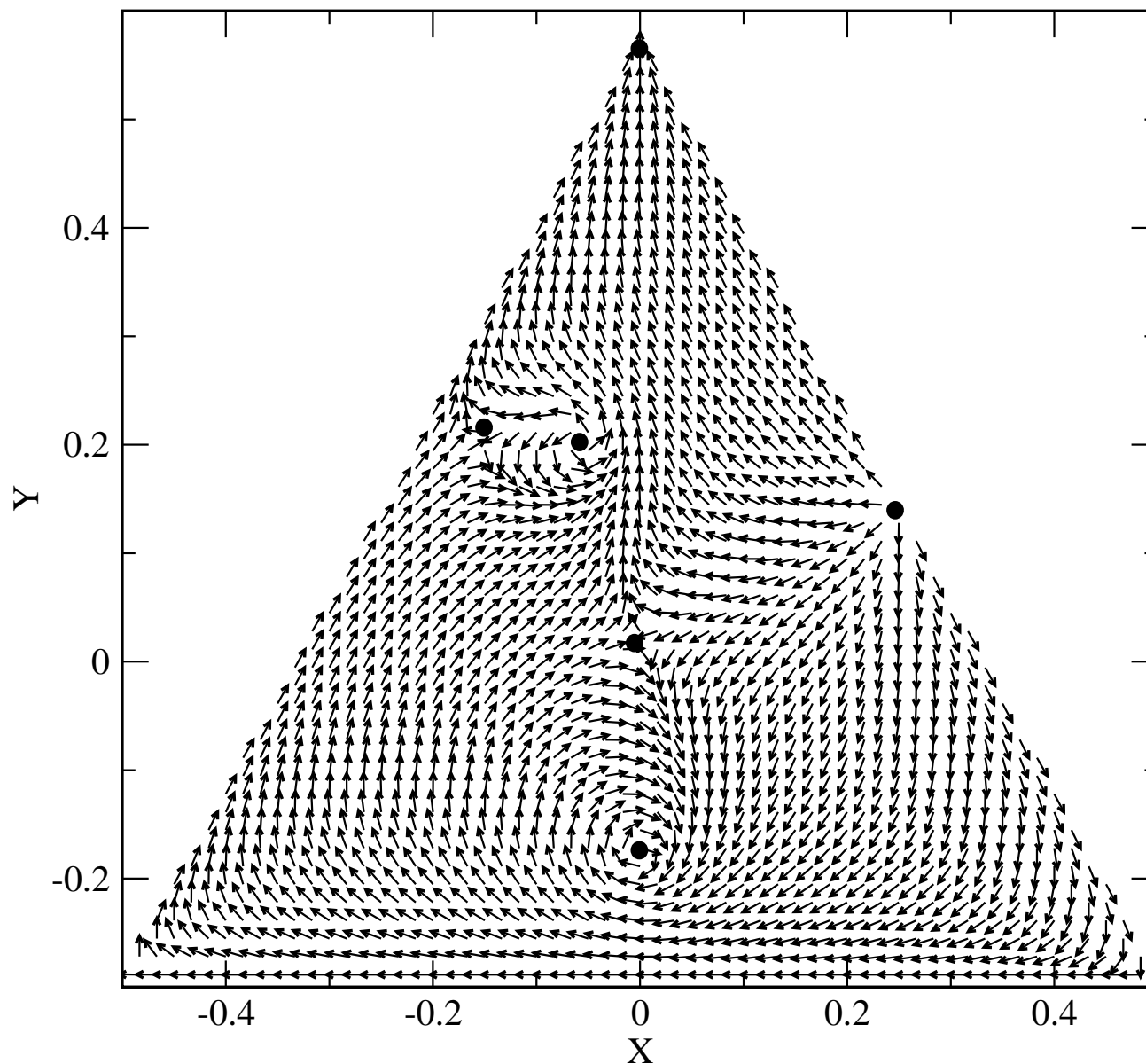
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Конформное отображение верхней полуплоскости на полосу  $0 < \text{Im } z < 1$  есть

$$T(t) = -\frac{\log t}{\pi},$$

где снова опущены дополнительные параметры, связанные со свободой выбора отображения верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость.

$$M(t) = \frac{at + b}{ct + d},$$

где  $ad - bc > 0$ , что соответствует отображению верхней полуплоскости на верхнюю, а не на нижнюю.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

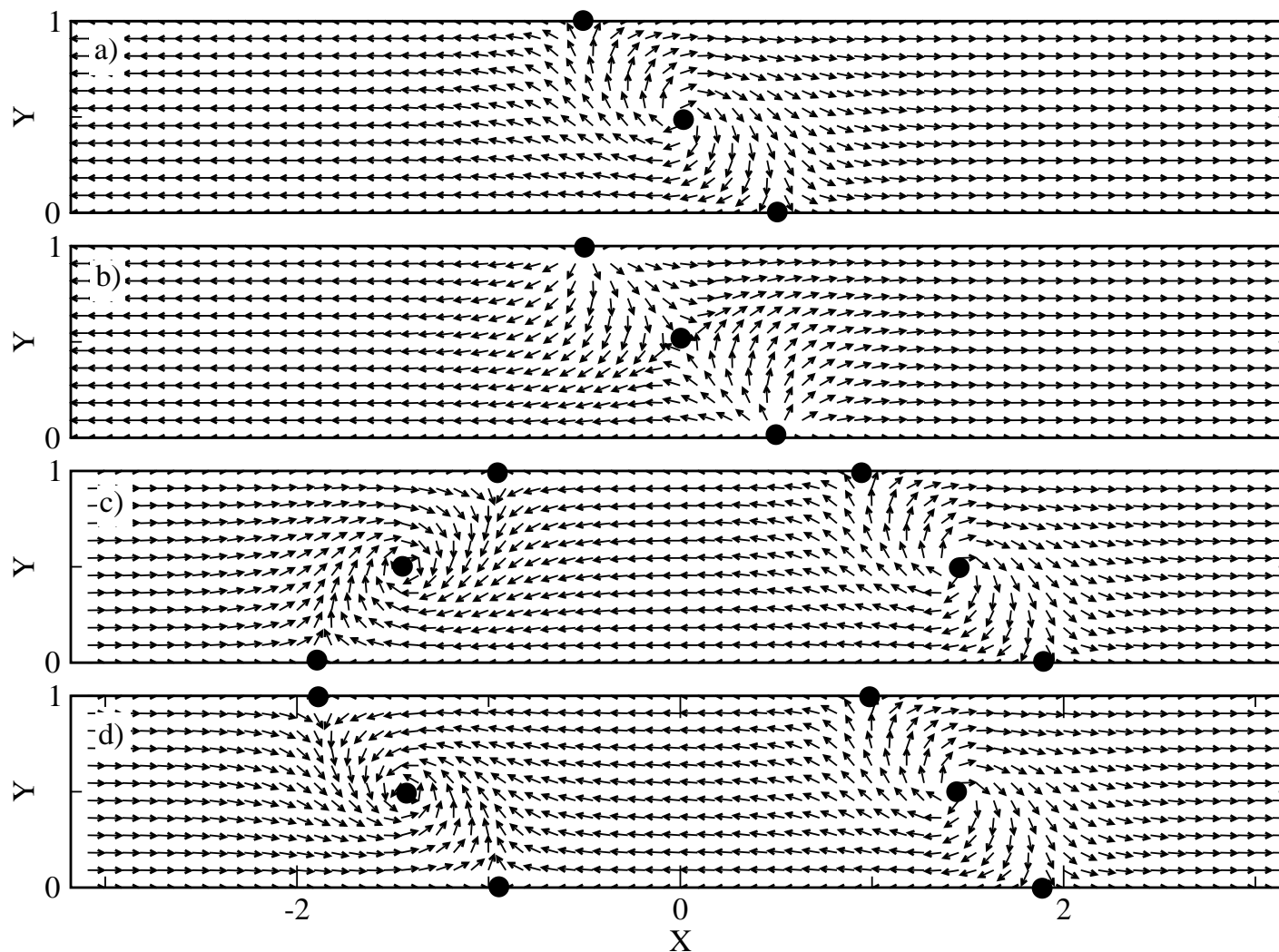
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

Топология

Динамика

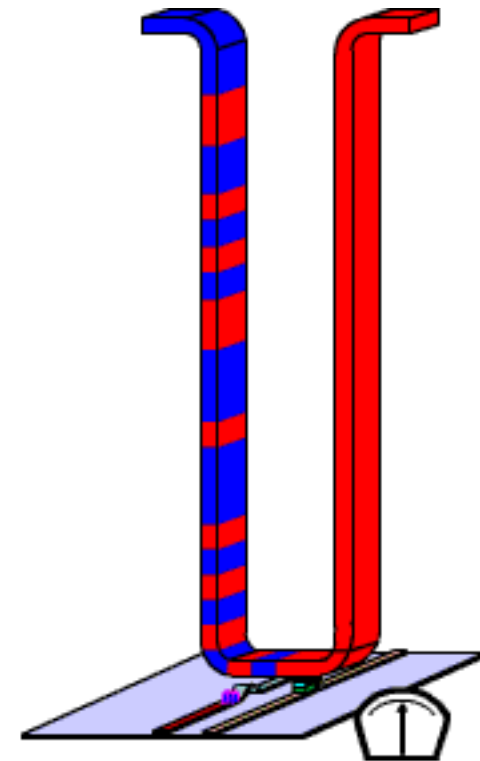
Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Задача для многих взаимодействующих доменных границ в длинной полосе возникает в связи с идеей Стюарта Паркина по созданию т.н. Racetrack magnetic memory.

S. S. P. Parkin, M. Hayashi, and L. Thomas, Science 320, 190 (2008).





Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

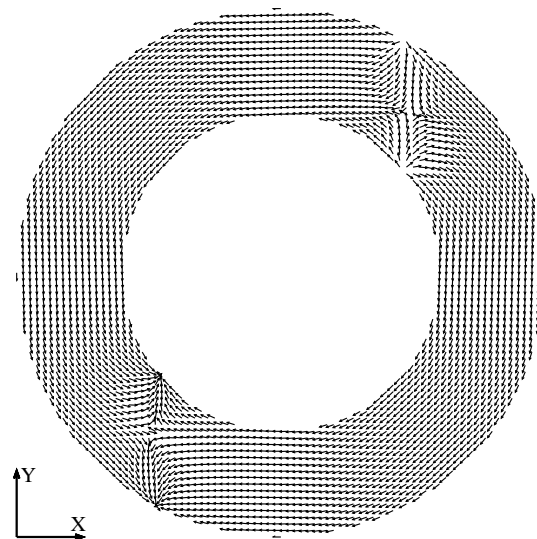
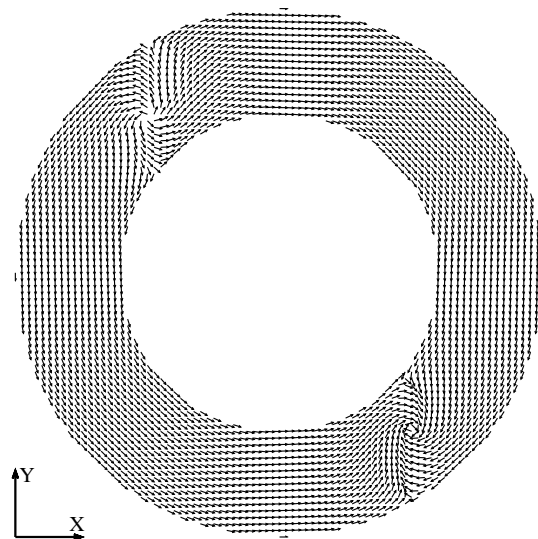
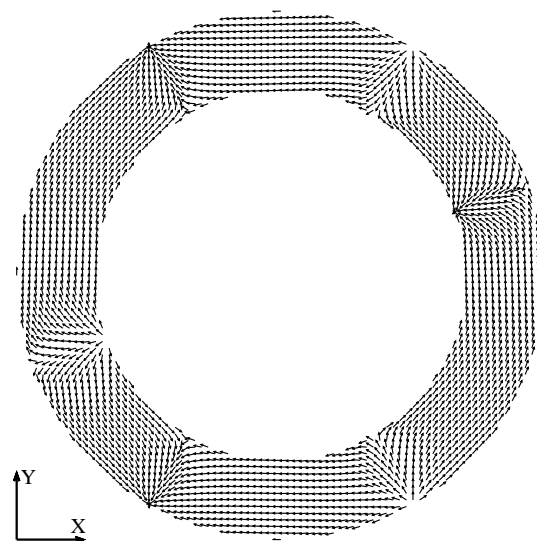
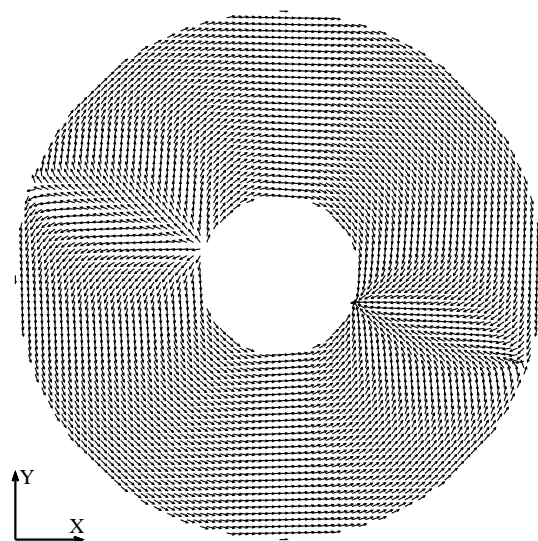
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



# Трёхсвязная область

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Кольцо

Трёхсвязная  
область

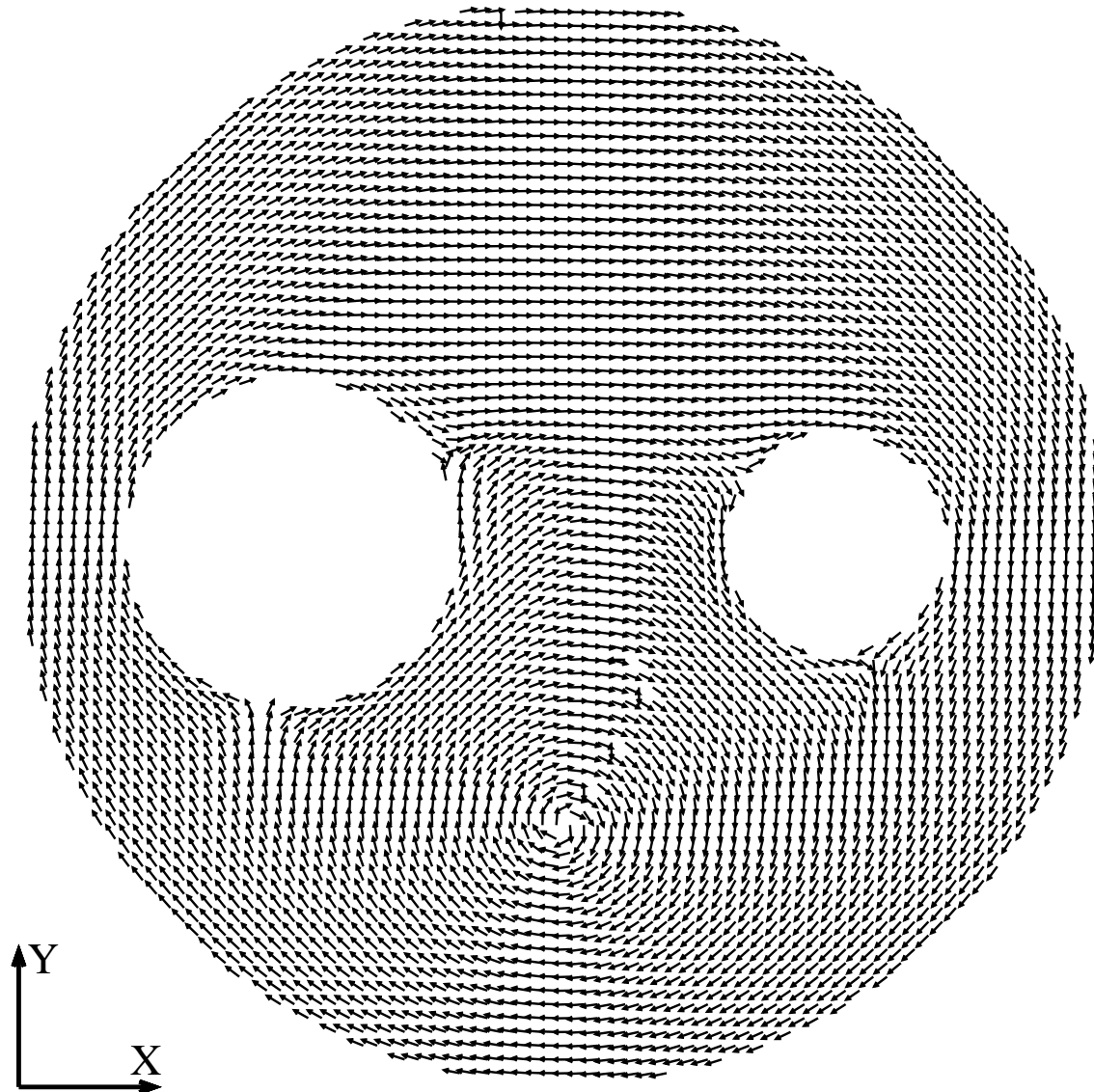
Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Двусвязные  
элементы

Многосвязные  
элементы

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

# Топологические ограничения в многосвязных элементах

# Двусвязные элементы

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Двусвязные  
элементы

Многосвязные  
элементы

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

ВВОДИМ функцию

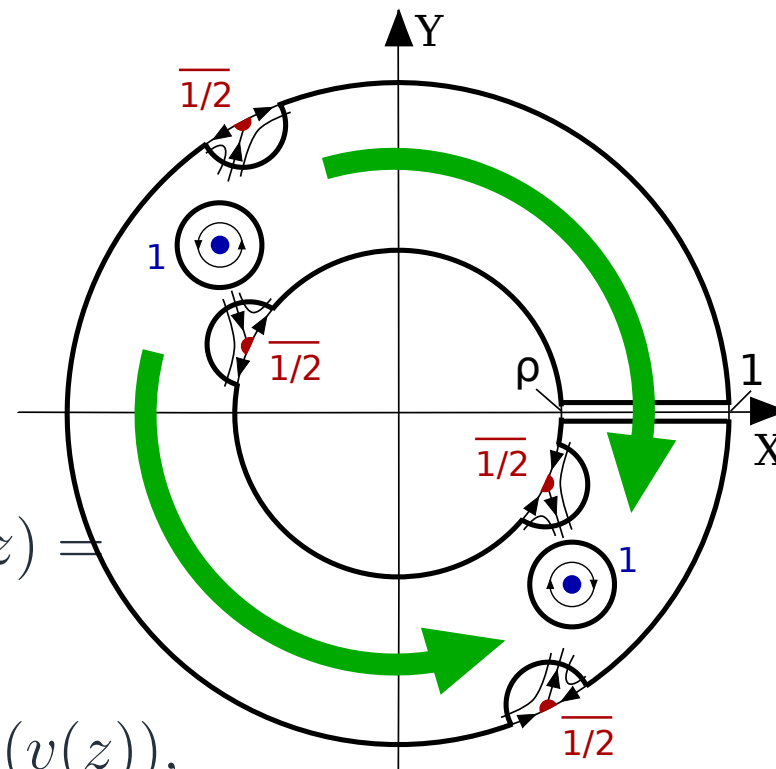
$$v(z) = vf(z)/z$$

записываем тождество

$$0 = \iint_{A-(v)} d \log (v(z)) \wedge d \log (z) =$$

$$- \oint_{\partial(A-(v)-[\rho,1])} \log (z) d \log (v(z)),$$

интегрируем



# Двусвязные элементы

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Двусвязные  
элементы

Многосвязные  
элементы

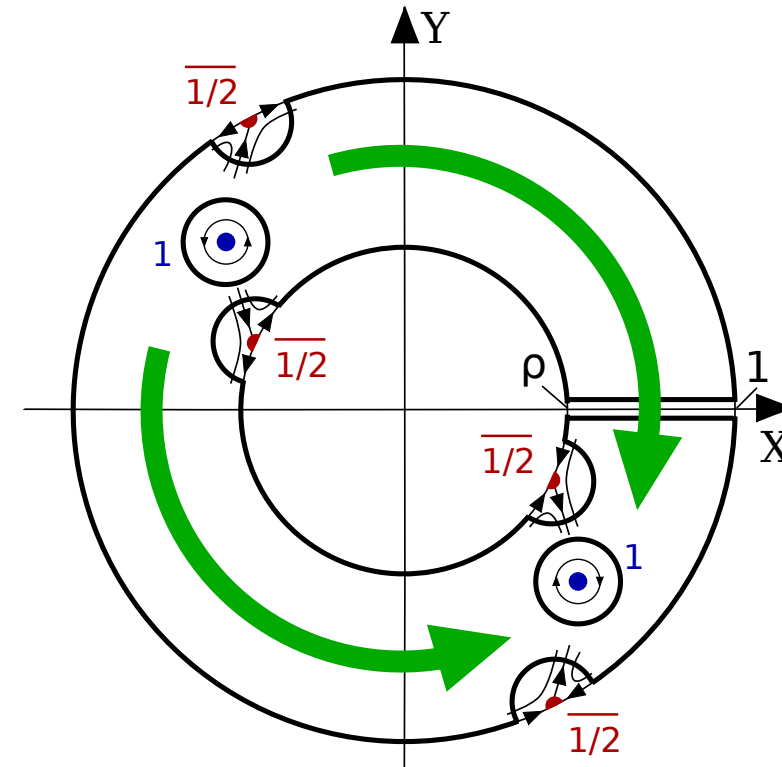
Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

$$\text{Arg}(f)_+ - \text{Arg}(f)_- \in \pi\mathbb{Z},$$



A. B. Bogatyrev and K. L. Metlov, Topological constraints on positions of magnetic solitons in multiply connected planar magnetic nanoelements, Phys. Rev. B 95, 024403 (2017)

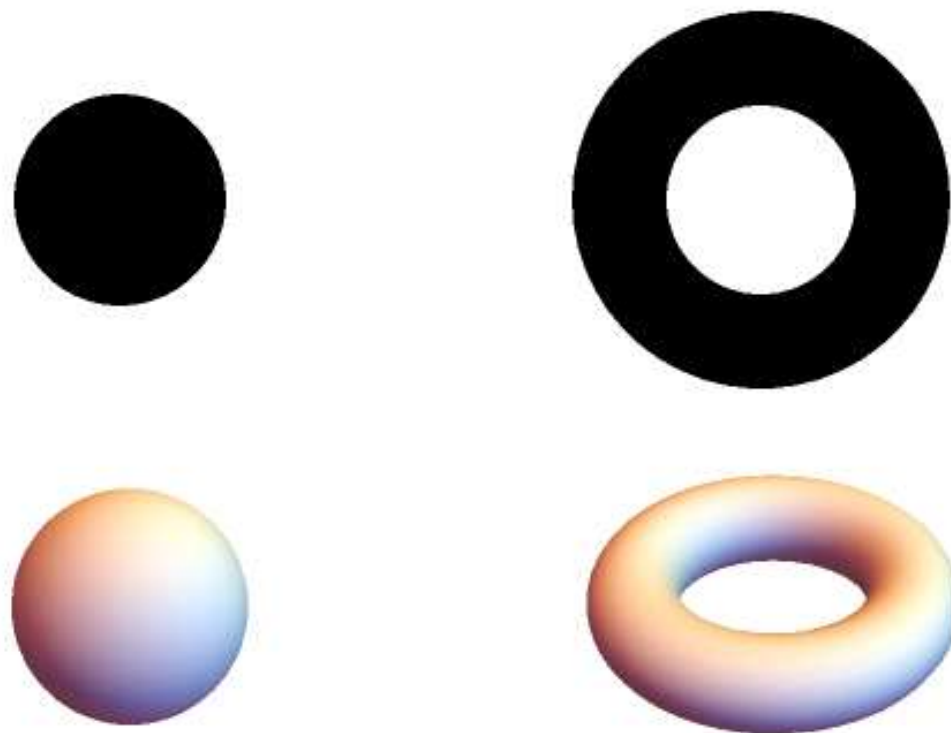
- Магнетизм
- Микромагнетизм
- Нано-магнетизм
- Нано-элементы
- Нано-магнетизм
- Примеры
- Топология
  - Двусвязные элементы
  - Многосвязные элементы
- Динамика
- Киральность.
- Magnetism@home
- Выводы

Теорема Абеля.

$$u = \frac{\prod_i (a_i - z)}{\prod_j (b_j - z)}$$

$$f = \hat{P}(u + \hat{I}u)$$

$$u' = u|_{a_k \rightarrow a'_k}$$
$$u'' = \frac{u'}{u} = \frac{a'_k - z}{a_k - z}$$



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Лагранжиан

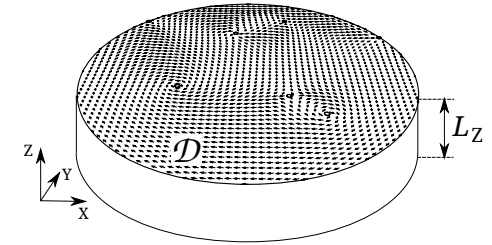
Прецессия  
вихря

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Динамика.



$$\tau = -\frac{M_S}{\gamma} (\cos \theta - \cos \theta_0) \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

В терминах функций комплексного переменного

$$T = \mp \frac{M_S L_Z}{\gamma} \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D'_S} \ln \frac{4 w(z, t) \bar{w}(\bar{z}, t')}{(1 + w(z, t) \bar{w}(\bar{z}, t'))^2} d^2 z \Bigg|_{t' \rightarrow t},$$

$$L(\{\dot{x}_i\}, \{x_i\}) = T(\{\dot{x}_i\}, \{x_i\}) - U(\{x_i\}),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

K.L. Metlov, Vortex mechanics in planar nanomagnets,  
Phys. Rev. B 88, 014427(2013).

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Лагранжиан

Прецессия  
вихря

Киральность.

Magnetism@home

Выводы



# Прецессия вихря

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Лагранжиан

Прецессия  
вихря

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

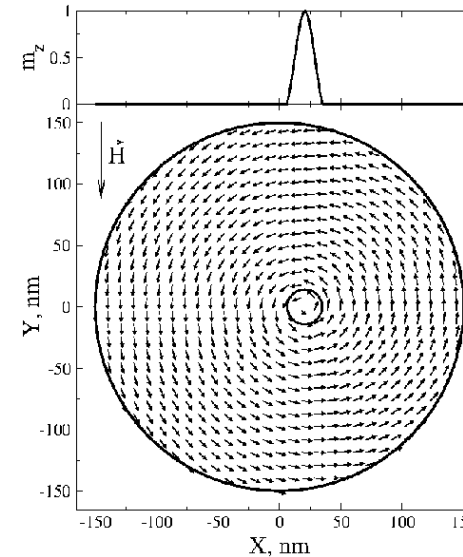
$$f(z) = i \frac{z - (A + \bar{A}z^2)}{r_V},$$

где  $r_V = const$  и  $A = A(t) = a_X(t) + ia_Y(t)$ ,  $|A| < 1/2$  пара обобщенных координат. Центр вихря при этом в точке  $z_C = (1 - \sqrt{1 - 4A\bar{A}})/(2\bar{A})$ .

Для малых смещений центра  $|A| \ll 1$

$$\mathcal{L} = \pm \kappa_2 (a_X(t)a'_Y(t) - a_Y(t)a'_X(t)) - k_2 (a_X^2(t) + a_Y^2(t)),$$

где  $\kappa_2 = (1 + r_V^4(4 \log 2 - 3))/(\gamma \mu_0 M_S)$  имеет размерность секунд,  $\mathcal{L} = L/(\mu_0 M_S^2 \pi L_Z R^2)$ ,  $k_2$  безразмерный коэффициент разложения потенциальной энергии.



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Лагранжиан

Прецессия  
вихря

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Уравнения движения имеют вид

$$\kappa_2 a'_X(t) \pm k_2 a_Y(t) = 0$$

$$\kappa_2 a'_Y(t) \mp k_2 a_X(t) = 0$$

и для начальных условий  $a_X(0) = a_0$ ,  $a_Y(0) = 0$  имеют решение

$$a_X(t) = a_0 \cos(\omega t)$$

$$a_Y(t) = \pm a_0 \sin(\omega t),$$

где

$$\omega = \omega_0 = k_2/\kappa_2.$$

Вихрь движется по кругу.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

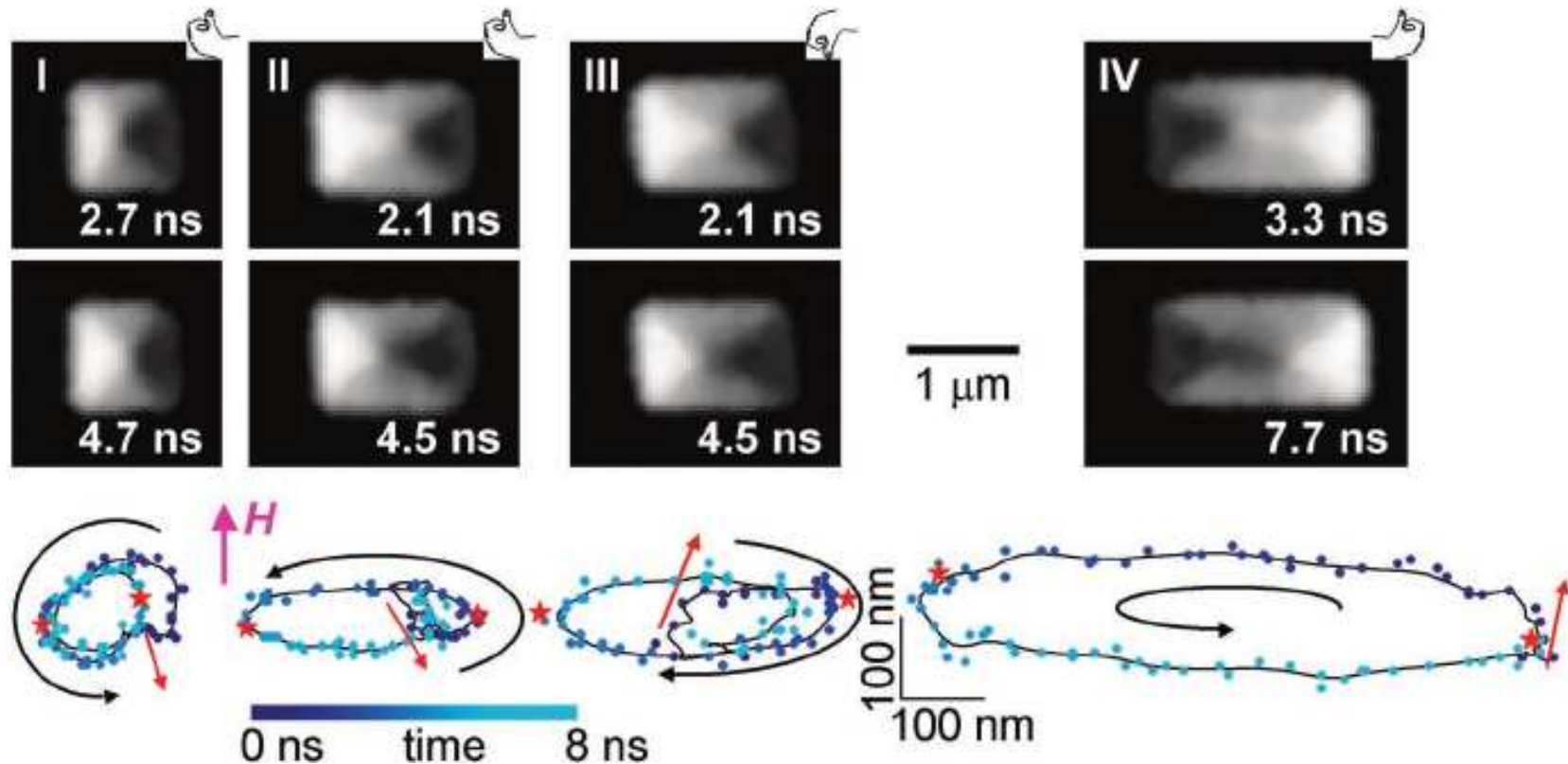
Киральность

Magnetism@home

Выводы

# Киральность.

# направление вращения вихря



S.-B. Choe et al., Science, 2004: Time-resolved x-ray imaging shows that the magnetization dynamics of a micron-sized pattern containing a ferromagnetic vortex is determined by its handedness, or chirality. ... results demonstrate that handedness, already well known to be important in biological systems, plays an important role in the dynamics of microscopic magnets.

WRONG !!!

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Киральность

Magnetism@home

Выводы

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

VOINC

Быстрый  
мультипольный  
метод

Результаты

Выводы

# Magnetism@home



Berkeley Open Infrastructure for Network Computing

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

BOINC

Быстрый  
мультипольный  
метод

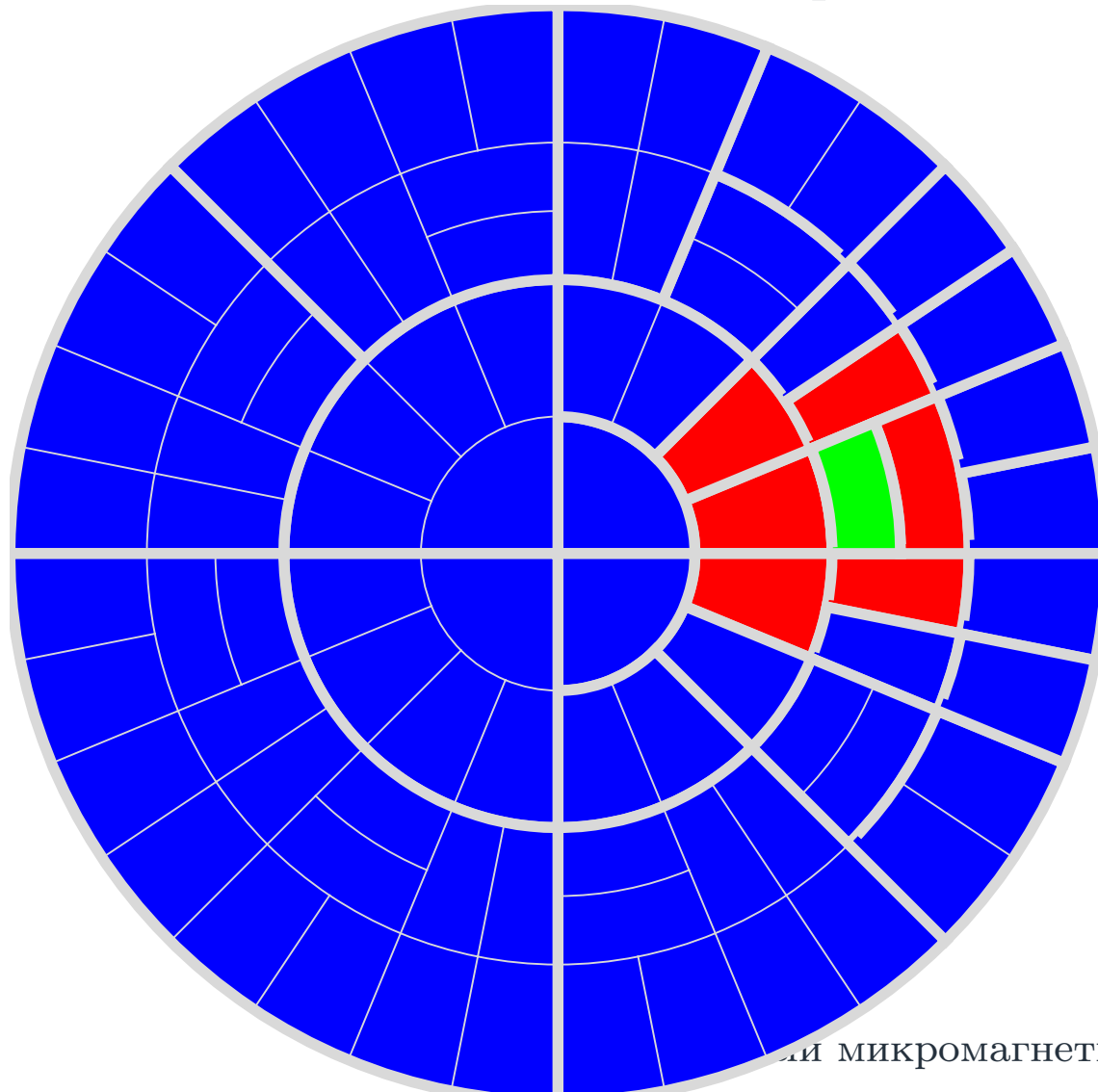
Результаты

Выводы

# Быстрый мультипольный метод

Rokhlin and Greengard:1987.

Один из 10-ти самых значимых алгоритмов 20-го века.



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

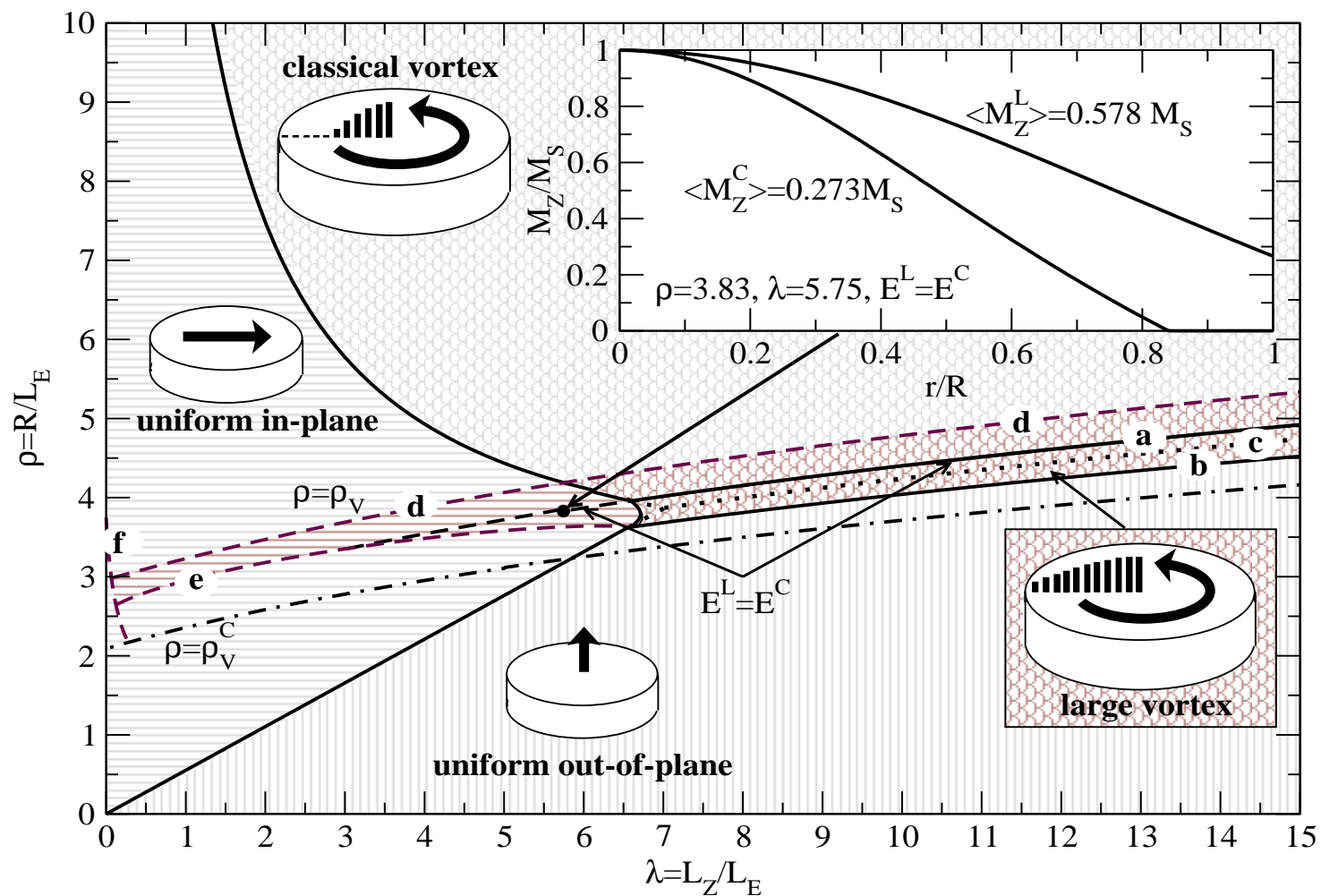
Magnetism@home

VOINC

Быстрый  
мультипольный  
метод

Результаты

Выводы



K.L. Metlov, Equilibrium large vortex state in ferromagnetic disks, JAP 113(22), 223905(2013).



Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Выводы

Выводы.

Магнетизм

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Нано-элементы

Нано-магнетизм

Примеры

Топология

Динамика

Киральность.

Magnetism@home

Выводы

Выводы

- Состояния планарных магнитных наноэлементов и их динамику удобно описывать при помощи функций комплексного переменного.
- Для бесконечной плёнки метастабильные состояния можно отобразить на множество рациональных функций с комплексными коэффициентами, для ограниченного наноэлемента – с действительными коэффициентами.
- Для наноэлементов с отверстиями существует связь между количеством и положениями вихрей и антивихрей, обусловленная их топологией.
- Киральные взаимодействия нарушают киральную симметрию.